

# BO1 History of Mathematics

## Lecture II

### Analytic geometry and the beginnings of calculus

#### Part 1: Early notation

MT 2021 Week 1

# Summary

## Part 1

- ▶ Brief overview of the 17th century
- ▶ A cautionary tale

## Part 2

- ▶ Development of notation

## Part 3

- ▶ Use of algebra in geometry
- ▶ The beginnings of calculus

# The 17th century

The main mathematical innovations of the 17th century:

- ▶ symbolic notation
- ▶ analytic (algebraic) geometry
- ▶ calculus
- ▶ infinite series [to be treated in later lectures]
- ▶ mathematics of the physical world [to be treated in later lectures]

# Symbolic notation

Symbolic notation makes mathematics easier

- ▶ to read
- ▶ to write
- ▶ to communicate (though perhaps not orally)
- ▶ to think about

# Symbolic notation

Symbolic notation makes mathematics easier

- ▶ to read
- ▶ to write
- ▶ to communicate (though perhaps not orally)
- ▶ to think about — and thus stimulates mathematical advances?

# Symbolic notation

Symbolic notation makes mathematics easier

- ▶ to read
- ▶ to write
- ▶ to communicate (though perhaps not orally)
- ▶ to think about — and thus stimulates mathematical advances?
- ▶ BUT it took a long time to develop
- ▶ why did it develop when it did?

# The communication of mathematics

Initially entirely verbal — but usually using a **set form of words**

# The communication of mathematics

Initially entirely verbal — but usually using a **set form of words**

Scribal **abbreviations** often used



# The communication of mathematics

Initially entirely verbal — but usually using a **set form of words**

Scribal **abbreviations** often used

- ▶ e.g., Diophantus (3rd-century Egypt) used  $\zeta$  as an abbreviation for an unknown quantity

# The communication of mathematics

Initially entirely verbal — but usually using a **set form of words**

Scribal **abbreviations** often used

- ▶ e.g., Diophantus (3rd-century Egypt) used  $\zeta$  as an abbreviation for an unknown quantity
- ▶ e.g., Bhāskara II (12th-century India) used the initial letters of *yāvattāvat* (*unknown*) and *rūpa* (*unit*) as shorthand: 'yā 2 rū 1' denoted ' $2x + 1$ '

# The communication of mathematics

Initially entirely verbal — but usually using a **set form of words**

Scribal **abbreviations** often used

- ▶ e.g., Diophantus (3rd-century Egypt) used  $\zeta$  as an abbreviation for an unknown quantity
- ▶ e.g., Bhāskara II (12th-century India) used the initial letters of *yāvattāvat* (*unknown*) and *rūpa* (*unit*) as shorthand:  
'*yā* 2 *rū* 1' denoted ' $2x + 1$ '

But these were not symbols that could be manipulated algebraically

# The communication of mathematics

Initially entirely verbal — but usually using a **set form of words**

Scribal **abbreviations** often used

- ▶ e.g., Diophantus (3rd-century Egypt) used  $\zeta$  as an abbreviation for an unknown quantity
- ▶ e.g., Bhāskara II (12th-century India) used the initial letters of *yāvattāvat* (*unknown*) and *rūpa* (*unit*) as shorthand: 'yā 2 rū 1' denoted ' $2x + 1$ '

But these were not symbols that could be manipulated algebraically

**Arrangement of signs** on the page could carry information

# The communication of mathematics

Initially entirely verbal — but usually using a **set form of words**

Scribal **abbreviations** often used

- ▶ e.g., Diophantus (3rd-century Egypt) used  $\zeta$  as an abbreviation for an unknown quantity
- ▶ e.g., Bhāskara II (12th-century India) used the initial letters of *yāvattāvat* (*unknown*) and *rūpa* (*unit*) as shorthand: 'yā 2 rū 1' denoted '2x + 1'

But these were not symbols that could be manipulated algebraically

**Arrangement of signs** on the page could carry information

- ▶ e.g., *tiān yuán shù* 天元術 (13th-century China):

# The communication of mathematics

Initially entirely verbal — but usually using a **set form of words**

Scribal **abbreviations** often used

- ▶ e.g., Diophantus (3rd-century Egypt) used  $\zeta$  as an abbreviation for an unknown quantity
- ▶ e.g., Bhāskara II (12th-century India) used the initial letters of *yāvattāvat* (*unknown*) and *rūpa* (*unit*) as shorthand: 'yā 2 rū 1' denoted '2x + 1'

But these were not symbols that could be manipulated algebraically

**Arrangement of signs** on the page could carry information

- ▶ e.g., *tiān yuán shù* 天元術 (13th-century China):

$$\begin{array}{c} \parallel \\ - \text{III} \text{元} \\ \equiv - \text{V} \end{array}$$

# The communication of mathematics

Initially entirely verbal — but usually using a **set form of words**

Scribal **abbreviations** often used

- ▶ e.g., Diophantus (3rd-century Egypt) used  $\zeta$  as an abbreviation for an unknown quantity
- ▶ e.g., Bhāskara II (12th-century India) used the initial letters of *yāvattāvat* (*unknown*) and *rūpa* (*unit*) as shorthand: 'yā 2 rū 1' denoted '2x + 1'

But these were not symbols that could be manipulated algebraically

**Arrangement of signs** on the page could carry information

- ▶ e.g., *tiān yuán shù* 天元術 (13th-century China):

$$\begin{array}{c} \parallel \\ - \text{III} \text{元} \\ \equiv - \text{Y} \end{array}$$

Algebraic symbolism of the form that we use came later

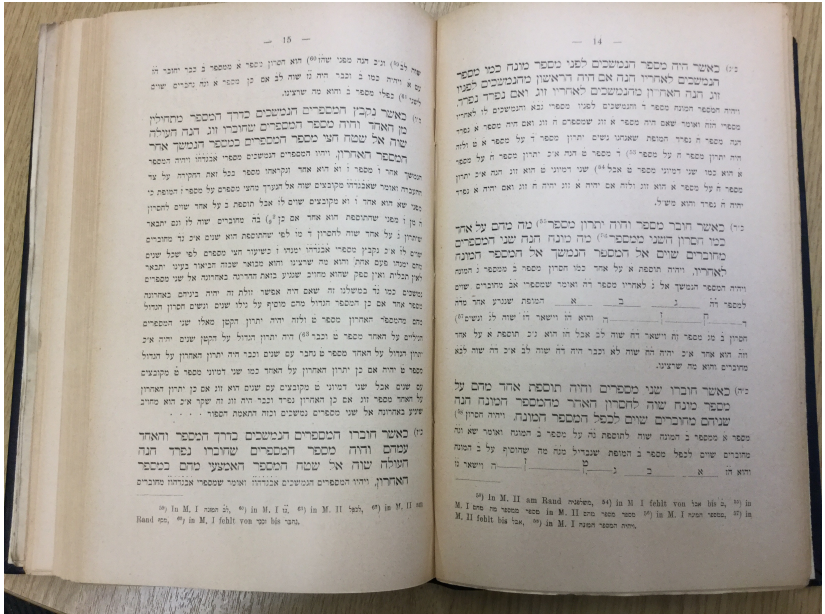
# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers



Levi Ben Gerson (Gersonides), *Ma'aseh Hoshev* (*The Work of the Calculator*), 1321 [picture is of a version printed in Venice in 1716]



# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers



(1) כאשר היה מספר הנמשכים לפני מספר מונח כמו מספר  
הנמשכים לאחריו הנה אם היה הראשון מהנמשכים לפני  
זו הנה האחרון מהנמשכים לאחריו וזו ואם נפרד נפרד  
ויהיה המספר המונה מספר ד הנמשכים לפני מספרו נכא הנמשכים לו לאחריו  
מספרו היה ואמר שמה מספר א וזו ששספים הונו ואם היה מספר א נפרד  
היה מספר ב נפרד הוספת שאמרנו נשים יתרון מספר ד על מספר א ו נלוח  
היה יתרון מספר ה על מספר ב מספר ו היה אוב יתרון מספר ה על מספר  
א הוא כמו שני דמינו מספר ו אבל (2) שני דמינו ו הוא זון היה אוב יתרון  
מספר ה על מספר א הוא זון ולוח א ויהא ז וזו יתה ה זון ואם יתה א נפרד  
ויהא ה נפרד והוא משיל.

(2) כאשר חובר מספר ויהו יתרון מספר (3) מה מום על אחד  
כמו חסרון השני ממספר (4) מה מונח הנה שני המספרים  
מוחברים ששים אל המספר הנמשך אל המספר המונח  
לאחריו ויהיה תוספת על אחד כמו חסרון מספר ב מספר א היתה  
ויהיה המספר הנמשך אל נ לאחריו מספר ד והוא ששספים אב מחברים שים  
לכספר זה א ב ג ד ה ו ז ויהא המוספת שיעור אחד מה  
ד חסרון ב מי מספר ה וישאר דה שיה לב אכל לו הוא נכס תוספת על אחד  
זה הוא אחד אוב יתה דה שיה ואב וכה היה דה שיה לב אוב דה שיה לכא  
מחברים והוא מה שרצינו.

(3) כאשר חוברו שני מספרים והיה תוספת אחד מהם על  
מספר מונח שיה חסרון האחר המוספר המונח הנה  
שניהם מוחברים ששים לכספר המספר המונח ויהיה חסרון (5)  
מספר א מספר ב המונח שיה תוספת לה על מספר ב המונח ואמר שיה זה  
מחברים שים לכספר מספר ב המוספת שנגדול מה מה שחוסר על ב המונח  
והוא ה א ב ג ד ה ו ז ויהא ה

<sup>(1)</sup> In M. II am Rand stehen, <sup>(2)</sup> In M. I fehlt von bis 2, <sup>(3)</sup> In M. I  
M. I steht, <sup>(4)</sup> In M. I steht, <sup>(5)</sup> In M. I steht, <sup>(6)</sup> In M. II fehlt bis 2, <sup>(7)</sup> In M. I steht, <sup>(8)</sup> In M. I steht, <sup>(9)</sup> In M. I steht, <sup>(10)</sup> In M. I steht.

שמה לב (1) וזו היה מספרו (2) הוא חסרון מספר א מספר ב כבר יחבר זה  
עם א ויהיה מספר ב וכבר היה לו שיה לב א כן מספר א היה נכסרים שים  
לכספר (3) כסלו מספר ב והוא מה שרצינו.

(1) כאשר נבקין המספרים הנמשכים כדרך המספר מתחילתו  
מן האחד ויהו מספר המספרים שחוכרו וזו הנה העולה  
שמה אל שמה היו מספר המספרים הנמשך אחד  
המספר האחרון ויהו המספרים הנמשכים מספר אנדרלו ויהו המספר  
המספר אחד ו מספר ז וא היה אחד נקראנו מספר בכל זאת חסרון על זה  
המספר ואמר שאנדרלו מקובצים שיה אל תעיד מהו מספרים על מספר ד המוספת ב  
מספר שיה הוא אחד ו וא מקובצים שים לו אבל תוספת ב על אחד שים לחסרון  
ה כן ו מספר שהתוספת הוא אחד אם כן (8) זה מחברים שיה לו נכס יתכא  
יתרון ב על אחד שיה לחסרון ד מו לפי שהתוספת הוא שנים אוב נד מחברים  
שים לו אוב נקבין מספר אנדרלו יעודו ו שיעורו היו מספרים לפי שכל שים  
מהו ומעט שים אחד והוא מה שרצינו והוא מנאר שמה מביאר בעני יתכא  
לפני תכלית ואין ספק שהוא מחוב שיעור כמות החריטה במחויטה אל שני מספרים  
נמשכים כמו זה במשלנו זה שמה היה אפשר וזלח זה ויהיה בעיניה במחויטה  
מספר אחד אם כן המספר הנדול מהו מספר על מלו שים חסרון הנדול  
מהו מספר האחרון מספר ו ולוח ויהו יתרון הקטן מאלי שני המספרים  
המילים על האחד מספר ב וכבר (9) היה יתרון הנדול על הקטן שים ויהו אוב  
יתרון הנדול על האחד מספר ב מחב עם שנים וכבר היה יתרון האחרון על הנדול  
מספר ב ויהו אם כן יתרון האחרון על האחד כמו שני דמינו מספר ב מקובצים  
עם שים אבל שני דמינו ו מקובצים עם שים הוא זון אם כן יתרון האחרון  
על האחד מספר זון אם כן האחרון נפרד וכבר היה זון זה שיקר אוב הוא מחוב  
שנים במחויטה אל שני מספרים נמשכים וכוח התוספת המספר . . .

(2) כאשר חוברו המספרים הנמשכים כדרך המספר והואחד  
עומד ויהו מספר המספרים שחוכרו נפרד הנה  
העולה שמה אל שמה המספר האנעני מהם בכספר  
האחרון ויהו המספרים הנמשכים אנדרלו ואמר ששספים אנדרלו מחברים

<sup>(1)</sup> In M. I steht, <sup>(2)</sup> In M. I steht, <sup>(3)</sup> In M. I steht, <sup>(4)</sup> In M. I steht, <sup>(5)</sup> In M. I steht, <sup>(6)</sup> In M. I steht, <sup>(7)</sup> In M. I steht, <sup>(8)</sup> In M. I steht, <sup>(9)</sup> In M. I steht, <sup>(10)</sup> In M. I steht.

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Book I, Proposition 26:

*If we add all consecutive numbers from one to any given number and the given number is even, then the addition equals the product of half the number of numbers that are added up times the number that follows the given even number.*

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Book I, Proposition 26:

*If we add all consecutive numbers from one to any given number and the given number is even, then the addition equals the product of half the number of numbers that are added up times the number that follows the given even number.*

Book I, Proposition 27:

*If we add all consecutive numbers from one to any given number and the given number is odd, then the addition equals the product of the number at half way times the last number that is added.*

(Translations from Hebrew by Leo Corry.)

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Converting these into modern notation, we get:

Book I, Proposition 26:

*If  $n$  is an even number, then  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ .*

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Converting these into modern notation, we get:

Book I, Proposition 26:

*If  $n$  is an even number, then  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ .*

Book I, Proposition 27:

*If  $n$  is an odd number, then  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}n$ .*

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Converting these into modern notation, we get:

Book I, Proposition 26:

*If  $n$  is an even number, then  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ .*

Book I, Proposition 27:

*If  $n$  is an odd number, then  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}n$ .*

The formulae are clearly the same, so why are these treated as separate propositions?

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Converting these into modern notation, we get:

Book I, Proposition 26:

*If  $n$  is an even number, then  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ .*

Book I, Proposition 27:

*If  $n$  is an odd number, then  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}n$ .*

The formulae are clearly the same, so why are these treated as separate propositions? The answer lies in the proofs, which, like the results themselves, are **entirely verbal**.

## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

A fundamental problem here lies in the difficulty of expressing the notion of 'any given number' (our ' $n$ ').



## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

A fundamental problem here lies in the difficulty of expressing the notion of 'any given number' (our ' $n$ ').

A commonly adopted solution was to outline the proof for a specific example, on the understanding that the reader should then be able to adapt the **method** to any other instance.

## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

A fundamental problem here lies in the difficulty of expressing the notion of 'any given number' (our ' $n$ ').

A commonly adopted solution was to outline the proof for a specific example, on the understanding that the reader should then be able to adapt the **method** to any other instance.

Ben Gerson's proof of Proposition 26 takes this approach, and is based on the idea of forming pairs of numbers with equal sums.\*

## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

A fundamental problem here lies in the difficulty of expressing the notion of 'any given number' (our ' $n$ ').

A commonly adopted solution was to outline the proof for a specific example, on the understanding that the reader should then be able to adapt the **method** to any other instance.

Ben Gerson's proof of Proposition 26 takes this approach, and is based on the idea of forming pairs of numbers with equal sums.\*

\*You might have heard a story about the young Gauss doing the same thing.

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proof of Proposition 26:

Take the example of 6.

## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proof of Proposition 26:

Take the example of 6. If we add 1 and 6, we get 7 ('the number that follows the given even number').

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proof of Proposition 26:

Take the example of 6. If we add 1 and 6, we get 7 ('the number that follows the given even number'). Notice that 2 is obtained from 1 by adding 1,

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proof of Proposition 26:

Take the example of 6. If we add 1 and 6, we get 7 ('the number that follows the given even number'). Notice that 2 is obtained from 1 by adding 1, and that 5 is obtained from 6 by subtracting 1,

## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proof of Proposition 26:

Take the example of 6. If we add 1 and 6, we get 7 ('the number that follows the given even number'). Notice that 2 is obtained from 1 by adding 1, and that 5 is obtained from 6 by subtracting 1, so 2 added to 5 is the same as 1 added to 6, namely 7.



## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proof of Proposition 26:

Take the example of 6. If we add 1 and 6, we get 7 ('the number that follows the given even number'). Notice that 2 is obtained from 1 by adding 1, and that 5 is obtained from 6 by subtracting 1, so 2 added to 5 is the same as 1 added to 6, namely 7. The only remaining pair is 3 and 4, which also add to give 7.

# A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proof of Proposition 26:

Take the example of 6. If we add 1 and 6, we get 7 ('the number that follows the given even number'). Notice that 2 is obtained from 1 by adding 1, and that 5 is obtained from 6 by subtracting 1, so 2 added to 5 is the same as 1 added to 6, namely 7. The only remaining pair is 3 and 4, which also add to give 7. The number of pairs is half the given even number, hence the total sum is half the number of numbers that are added up times the number that follows the given even number.

## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proof of Proposition 26:

Take the example of 6. If we add 1 and 6, we get 7 ('the number that follows the given even number'). Notice that 2 is obtained from 1 by adding 1, and that 5 is obtained from 6 by subtracting 1, so 2 added to 5 is the same as 1 added to 6, namely 7. The only remaining pair is 3 and 4, which also add to give 7. The number of pairs is half the given even number, hence the total sum is half the number of numbers that are added up times the number that follows the given even number.

This proof is clearly not valid when the given number is odd, since Ben Gerson would have been required to halve it — but he was working only with (positive) integers

## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proposition 27 therefore needs a separate proof, which similarly does not apply when the given number is even (see Leo Corry, *A brief history of numbers*, OUP, 2015, p. 119)

As Corry notes:

*For Gersonides, the two cases were really different, and there was no way he could realize that the two situations . . . were one and the same as they are for us.*

## A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proposition 27 therefore needs a separate proof, which similarly does not apply when the given number is even (see Leo Corry, *A brief history of numbers*, OUP, 2015, p. 119)

As Corry notes:

*For Gersonides, the two cases were really different, and there was no way he could realize that the two situations . . . were one and the same as they are for us.*

**Moral:** take care when converting historical mathematics into modern terms!