

O1 History of Mathematics

Lecture III

Analytic geometry, and the beginnings of calculus, part 1

Monday 15th October 2018
(Week 2)

Summary

- ▶ Brief overview of the 17th century
- ▶ A cautionary tale
- ▶ Development of notation
- ▶ Use of algebra in geometry
- ▶ The beginnings of calculus

The 17th century

The main mathematical innovations of the 17th century:

- ▶ symbolic notation
- ▶ analytic (algebraic) geometry
- ▶ calculus
- ▶ infinite series [to be treated in later lectures]
- ▶ mathematics of the physical world [to be treated in later lectures]

Symbolic notation

Symbolic notation makes mathematics easier

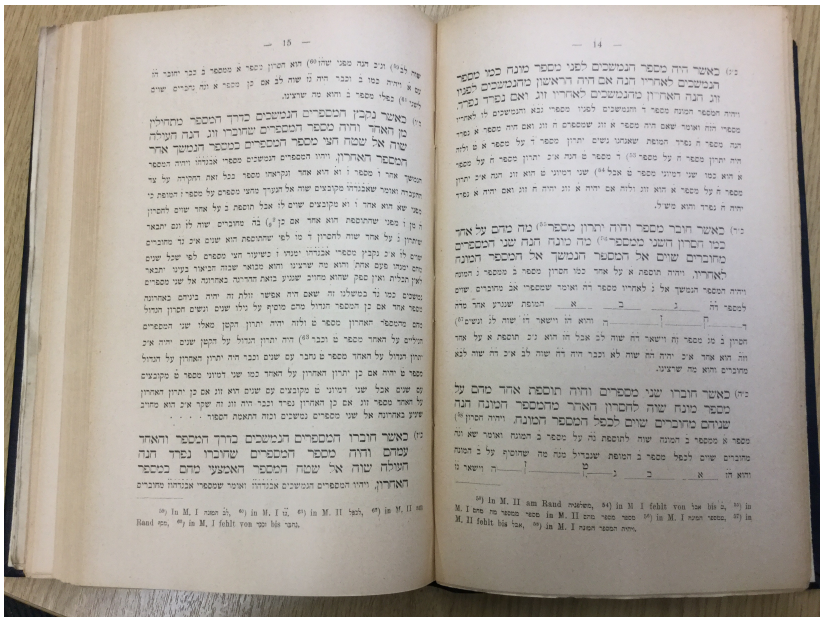
- ▶ to read
- ▶ to write
- ▶ to communicate (though perhaps not orally)
- ▶ to think about — and thus stimulates mathematical advances?
- ▶ BUT it took a long time to develop
- ▶ why did it develop when it did?

A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers



Levi Ben Gerson (Gersonides), *Ma'aseh Hoshev* (*The Work of the Calculator*), 1321 [picture is of a version printed in Venice in 1716]

A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers



10 כאשר היה מספר הנמשכים לפני מספר מונח כמי מספר
הנמשכים לאחריו הנה אם היה הראשון מונגמשכים לפני
זו הנה האחרון מונגמשכים לאחריו וזו ואם נפטר נפטר
וזהו המספר המונה מספר ד הנמשכים לפני מספר ז הממשכים לו לאחריו
מספר י וזהו ואם היה מספר ז וזי שפספס זה זוג ואם היה מספר א נפטר
היה מספר ה נפטר הוספת שאמרנו נשים יתרון מספר ד על מספר א וכלת
היה יתרון מספר ה על מספר ב ⁶⁰ ד מספר ה היה יתרון מספר ה על מספר
א הוא כמו שני דמיוני מספר א אבל ⁶¹ שני דמיוני ב הוא זוג היה אים יתרון
מספר ה על מספר א הוא זוג ולזה אם יהיה א זוג יהיה ה זוג ואם יהיה א נפטר
יהיה ה נפטר והוא משול.

11 כאשר חובר מספר ודוה יתרון מספר ⁶² מה מזה על אדר
כמו חסרון השני מנספר ⁶³ מה מונח הנה שני המספרים
מוחברים שוים אל המספר הנמשך אל המספר המונח
לאחריו ויהיה תוספת על אחר כמו חסרון מספר ב מספר ב המנה
ויהיה המספר הנמשך א ז לאחרי מספר ד ואומר שפספס אב מחברים שוים
לכספי דה ז א ב א ב א המוספת שבעה אחר מה
ד $z \quad | \quad \frac{p}{2} \quad | \quad \frac{p}{2} \quad | \quad | \quad \frac{p}{2} \quad | \quad \frac{p}{2} \quad | \quad \frac{p}{2} \quad | \quad \frac{p}{2} \quad | \quad \frac{p}{2} \quad | \quad \frac{p}{2} \quad | \quad \frac{p}{2}$
הוא ד וישאר דו שיה לז נשים ⁶⁴
חסרון ב מי מספר ה וישאר דה שיה לב אבל לו הוא ניב תוספת על אדר
זה הוא אדר אים יתרה דה שיה לא וכבר היה דה שיה לב אים דה שיה לבא
מחברים והוא מה שרצינו.

⁶⁰ In M. II am Rand stehen, ⁶¹ in M. I fehlt von lui bis 3, ⁶² in
M. I eine 4, ⁶³ in M. I steht 2, ⁶⁴ in M. I steht 2, ⁶⁵ in M. I steht 2, ⁶⁶ in M. I steht 2, ⁶⁷ in M. I steht 2, ⁶⁸ in M. I steht 2, ⁶⁹ in M. I steht 2, ⁷⁰ in M. I steht 2.

12 כאשר נתקין המספרים הנמשכים כדרך המספר מחולקין
מן האחד ודוה מספר המספרים שתוכרו זוג הנה העולה
שויה אל שמה העי מספר המספרים הנמשך אדר
המספר האחרון ויהיו המספרים הנמשכים מספר אכנילו ויהיה המספר
המספר אדר ז מספר י וא היה אחר נתקיימו מספר ככל זאת חקוקה על פי
המקנה ואומר שאכנילו מקובצים שיה אל הערך מהני מספרים על מספר ז המוסת
ב מספר י הוא אחר ו אם מקובצים שוים לו אבל תוספת ב על אחר שוים לחסרון
הן ז מספר שיהתקפת הוא אחר אם כן ⁶⁹ זה מחברים שיה לו זוג יתבאר
יתרון ב על אחר שיה לחסרון ד מו לפי שהתוספת הוא ששם אים זי מחברים
שוים לו אים נתקין מספר אכנילו ישננו ז כשיעור העי מספרים לפי שכל שנים
מהם ובעני סגס אחר ודוה מה שרצינו ודוה מנאר שמה הביאור בעני יתבאר
לאך המלה ואין ספק שהוה מחוב שיעוי באת החריטה באחרונה אל שני מספרים
נמשכים כמו זה כמשילנו זה שאם היה אפטר וולת לו יהיה בעינים באחרונה
מספר אחר אם כן המספר הנדול מהם מסוכ על מלו שנים חסרון הנדול
מהם מספרים האחרון מספר ו ולזה יהיה יתרון הקטן מאלי שני המספרים
המילים על האחד מספר ו וכבר ⁶⁸ היה יתרון הנדול על הקטן שנים יהיה אים
יתרון הנדול על האחד מספר ו כמר עש שנים וכבר היה יתרון האחרון על הנדול
מספר ו יהיה אם כן יתרון האחרון על האחד כמו שני דמיוני מספר ב מקובצים
עש שנים אבל שני דמיוני ב מקובצים עש שנים הוא זוג אם כן יתרון האחרון
על האחד מספר זוג אם כן האחרון נפטר וכבר היה זוג אם שקר אים הוא מחוב
שניע באחרונה אל שני מספרים נמשכים וזהו החלטה המספר . . .

13 כאשר חוברו המספרים הנמשכים כדרך המספר והאחד
עמדה ודוה מספר המספרים שתוכרו נפטר הנה
העולה שויה אל שמה המספר האנעני מהם כמספר
האחרון ויהיו המספרים הנמשכים אכנילו ואמר שפספס אכנילוהו מחברים

⁶⁹ In M. I steht 2, ⁷⁰ in M. I steht 2, ⁷¹ in M. I steht 2, ⁷² in M. I steht 2, ⁷³ in M. I steht 2, ⁷⁴ in M. I steht 2, ⁷⁵ in M. I steht 2, ⁷⁶ in M. I steht 2, ⁷⁷ in M. I steht 2, ⁷⁸ in M. I steht 2, ⁷⁹ in M. I steht 2.

A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Book I, Proposition 26:

If we add all consecutive numbers from one to any given number and the given number is even, then the addition equals the product of half the number of numbers that are added up times the number that follows the given even number.

Book I, Proposition 27:

If we add all consecutive numbers from one to any given number and the given number is odd, then the addition equals the product of the number at half way times the last number that is added.

(Translations from Hebrew by Leo Corry.)

A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Converting these into modern notation, we get:

Book I, Proposition 26:

If n is an even number, then $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$.

Book I, Proposition 27:

If n is an odd number, then $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}n$.

The formulae are clearly the same, so why are these treated as separate propositions? The answer lies in the proofs, which, like the results themselves, are **entirely verbal**.

A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

A fundamental problem here lies in the difficulty of expressing the notion of 'any given number' (our ' n ').

A commonly adopted solution was to outline the proof for a specific example, on the understanding that the reader should then be able to adapt the **method** to any other instance.

Ben Gerson's proof of Proposition 26 takes this approach, and is based on the idea of forming pairs of numbers with equal sums.*

*You might have heard a story about the young Gauss doing the same thing.

A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proof of Proposition 26:

Take the example of 6. If we add 1 and 6, we get 7 ('the number that follows the given even number'). Notice that 2 is obtained from 1 by adding 1, and that 5 is obtained from 6 by subtracting 1, so 2 added to 5 is the same as 1 added to 6, namely 7. The only remaining pair is 3 and 4, which also add to give 7. The number of pairs is half the given even number, hence the total sum is half the number of numbers that are added up times the number that follows the given even number.

This proof is clearly not valid when the given number is odd, since Ben Gerson would have been required to halve it — but he was working only with (positive) integers

A cautionary tale: Levi Ben Gerson and sums of integers

Proposition 27 therefore needs a separate proof, which similarly does not apply when the given number is even (see Leo Corry, *A brief history of numbers*, OUP, 2015, p. 119)

As Corry notes:

For Gersonides, the two cases were really different, and there was no way he could realize that the two situations ... were one and the same as they are for us.

Moral: take care when converting historical mathematics into modern terms!

Notation: compare Cardano (Ars magna, 1545)...



Having raised a third part of the number of things to a cube, to which you add the square of half the number in the equation and take the root of the total, consider the square [root], which you will take twice; and to one of them you add half of the same, and you will have the binome with its apotome, whence taking the cube root of the apotome from the cube root of its binome, the difference that comes from this, is the value of the thing.

(Mathematics emerging, p. 327)

... with Viète (c. 1590)...

François Viète
(Francisci Vieta)
Opera mathematica
1646, p. 130

130 DE EMENDATIONE

II.

S₁ A quad. — B in A 2, æquetur Z plano. A — B esto E. Igitur E quad, æquabitur Z plano → B quad.

Confectarium.

Itaque $\sqrt[3]{z^2 + 2qz} + B$ fit A, de qua primum quærebatur.
S₁ B 1. Z planum 20. A 1 N. 1 Q — 2 N, æquabitur 20. & fit 1 N. $\sqrt[3]{21 + 1}$.

III.

S₁ D 2 in A — A quad., æquetur Z plano. D — E, vel D → E esto A. E quad., æquabitur D quad. — Z plano.

Confectarium.

Itaque, D minus, plusve $\sqrt[3]{D^2 - z^2}$ fit A, de qua primum quærebatur.
S₁ D 5. Z planum 20. A 1 N. 10 N — 1 Q, æquatur 20. & fit 1 N. 5 — $\sqrt[3]{5}$, vel 5 + $\sqrt[3]{5}$.

De reductione cuborum simpliciter adfectorum sub quadrato, ad cubos simpliciter adfectos sub latere.

Formule tres.

I.

S₁ A cubus → B 3 in A quad., æquetur Z folido. A → B esto E. E cubus — B quad. 3 in E, æquabitur Z folido — B cubo 2.

1 C + 6 Q, æquatur 1600. est 1 N 10. 1 C — 12 N, æquatur 1584. est 1 N 12.

Ad Arithmetica non incongrue equatur aliquod superimponitur notis aliteratæ radicis, ad differentiam notarum ejus, de qua primum quærebatur.

II.

S₁ A cubus — B 3 in A quad., æquetur Z folido. A — B esto E. E cubus — B quad. 3 in E, æquabitur Z folido → B cubo 2.

1 C — 6 Q, æquatur 400. est 1 N 10. 1 C — 12 N, æquatur 416. est 1 N 8.

III.

S₁ B 3 in A quad. — A cubo, æquetur Z folido. A — B esto E. B quad. 3 in E. — E cubo, æquabitur Z folido — B cubo 2. Vel B — A esto E. B quad. 3 in E. — E cubo, æquabitur B cubo 2 — Z folido.

21 Q — 1 C, æquatur 972. & est 1 N 9, vel 18. 147 N — 1 C, æquatur 286. & est 1 N 2, vel 17.
9 Q — 1 C, æquatur 28. & est 1 N 2. 27 N — 1 C, æquatur 26. & est 1 N 1.

De reductione cuborum adfectorum tam sub quadrato quam latere, ad cubos adfectos simpliciter sub latere.

Formule septem.

I.

S₁ A cubus → B 3 in A quad. → D plano in A, æquetur Z folido. A → B esto E. E cubus → D plano — B quad., in E æquabitur Z folido → D plano in B — B cubo 2.

1 C + 30 Q + 330 N, æquatur 788. & est 1 N 2. 1 C + 30 N, æquatur 2088. & est 1 N 12.

1 C +

... with Viète (c. 1590)...

130

DE EMENDATIONE

II.

SI A quad. — Bin A 2, æquetur Z plano. A — B esto E. Igitur E quad, æquabitur Z plano + B quad.

Confectarium.

Itaque $\sqrt{Z \text{plani} + B \text{quad.}}$ + B fit A, de qua primum quærebatur.

Sit B 1. Z planum 20. A 1 N. 1 Q — 2 N, æquabitur 20. & fit 1 N. $\sqrt{21 + 1}$.

III.

SI D 2 in A — A quad., æquetur Z plano. D — E, vel D + E esto A. E quad., æquabitur D quad. — Z plano.

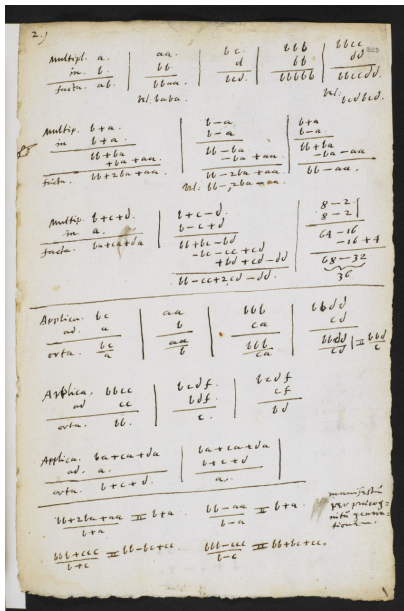
Confectarium.

Itaque, D minus, plusve $\sqrt{D \text{quad.} - Z \text{plano}}$ fit A, de qua primum quærebatur.

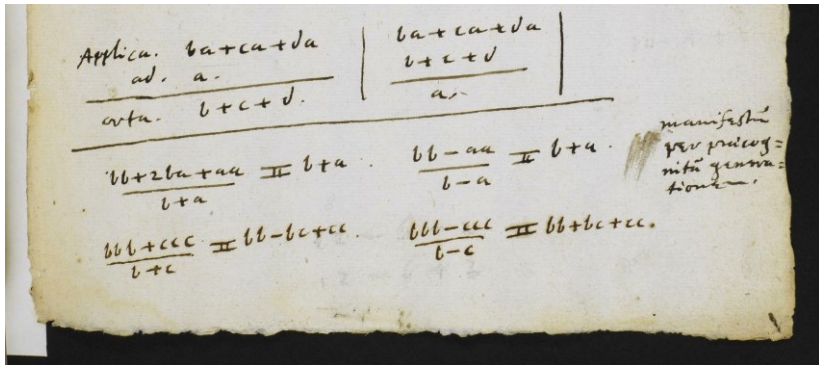
Sit D 5. Z planum 20. A 1 N. 10 N — 1 Q, æquatur 20. & fit 1 N. $5 - \sqrt{5}$, vel $5 + \sqrt{5}$.

... and with Harriot (c. 1600)

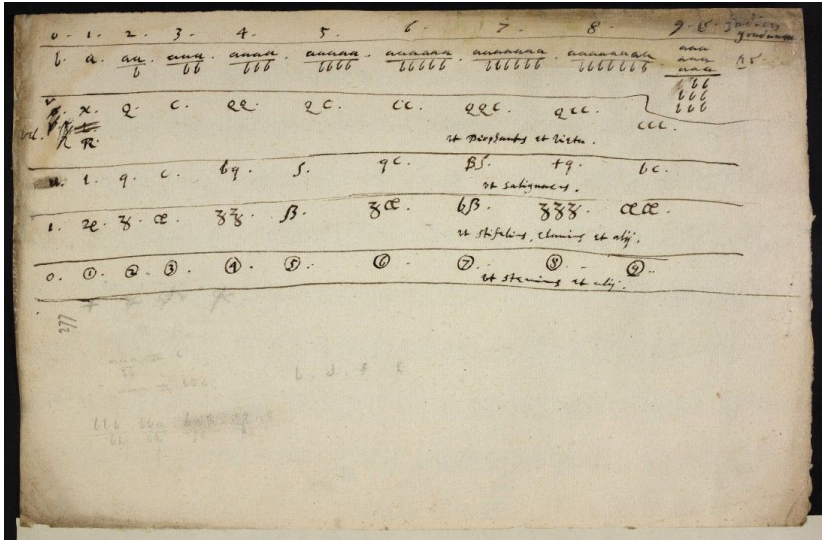
British Library
 Add MS 6784 f. 323
 available at
[Thomas Harriot Online](http://www.thomasharriot.org)



... and with Harriot (c. 1600)



And here is Harriot's own comparison



Notation: Viète (Tours, c. 1590)

François Viète (1540–1603, France):

A, E, ... (i.e., vowels) for unknowns

B, C, D, ... (i.e., consonants) for known
or given quantities

symbols + , -

but otherwise verbal descriptions and
connections: quadratum (squared),
cubus (cubed), aequatur (be equal), ...



Notation: Harriot (London, c. 1600)

Thomas Harriot (1560–1621, England):

a, e, ... for unknowns

b, c, d, ... for known or given quantities

+, -

ab, aa, aaa

and many symbols: =, >, ...

(For another example of Harriot's use of notation, see *Mathematics emerging*, §2.2.1.)



Notation: Descartes (Netherlands, 1637)

René Descartes (1596–1650, France and Holland):

x, y, \dots for unknowns

a, b, c, \dots for known or given quantities

$+, -$

xx, x^3, x^4, \dots

Descartes' notation was widely adopted, although his ' ∞ ' for equality eventually gave way to '=', and his ' \sqrt{C} ' to ' $\sqrt[3]{}$ '.



Descartes' notation

tirer de cete science. Aussi que ie n'y remarque rien de si difficile, que ceux qui feront vn peu versés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouver.

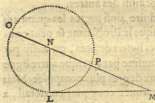
C'est pourquoy ie me contenteray icy de vous avertir, que pourvû qu'en demeslant ces Equations on ne manque point a se servir de toutes les diuisions, qui seront possibles, on aura infalliblement les plus simples termes, auxquels la question puisse estre reduite.

Quels sont les problemes plans

Et que si elle peut estre resolue par la Geometrie ordinaire, c'est a dire, en ne se servant que de lignes droites & circulaires tracés sur vne superficie plate, lorsque la derniere Equation aura esté entièrement demeslée, il n'y restera tout au plus qu'un quarré inconnu, esgal a ce qui se produist de l'Addition, ou soustraction de sa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité aussi connue.

Comment ils se resoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue se trouve aisément. Car si l'ay par exemple



$$x \propto a x + bb$$

ie fais le triangle rectangle NLM, dont le coste LM est esgal à b racine quarrée de la quantité connue bb , & l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par x que ie suppose estre la ligne inconnue. puis prolongeant MN la baze de ce triangle,

angle, iusques a O, en forte qu'N O soit esgale a NL, la toute OM est x la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete forte

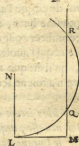
$$x \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

Que si i'ay $y y \propto -a y + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouver, ie fais le mesme triangle rectangle NLM, & de sa baze MN i'oste NP esgale a NL, & le reste PM est y la racine cherchée. De façon que i'ay $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \propto -a x^2 + b$, PM seroit x^2 . & i'auois

$$x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$
 & ainsi des autres.

Enfin si i'ay

$$x \propto a x - bb$$



ie fais NL esgale à $\frac{1}{2}a$, & LM esgale à b côme deuant, puis, au lieu de ioindre les points MN, ie tire MQR parallele a LN, & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la coupe aux points Q & R, la ligne cherchée x est MQ oubié MR, car en ce cas elle s'ex-

prime en deux façons, a scauoir $x \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $x \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne coupe ny ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du probleme proposé est impossible.

Au

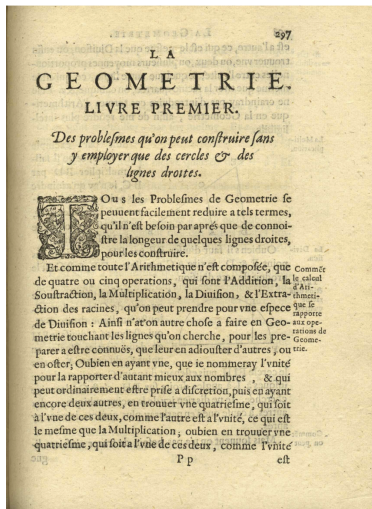
Symbolism established in algebra



Frontispiece to: Johannes Faulhaber, *Ingenieurs-Schul, Anderer Theil*, Ulm, 1633 (on fortification)

See: Volker Remmert, 'Antiquity, nobility, and utility: picturing the Early Modern mathematical sciences', in *The Oxford handbook of the history of mathematics* (Eleanor Robson & Jacqueline Stedall, eds.), OUP, 2009, pp. 537–563

Analytic (algebraic) geometry



La géométrie (1637)

Solution of geometric problems
by algebraic methods

Appendix to

Discours de la méthode

“by commencing with objects the
simplest and easiest to know, I
might ascend by little and little”

Descartes' analytic geometry

We may label lines (line segments) with letters a, b, c, \dots

Then $a + b, a - b, ab, a/b, \sqrt{a}$ may be constructed by ruler and compass.

Descartes' method

- ▶ represent all lines by letters
- ▶ use the conditions of the problem to form equations
- ▶ reduce the equations to a single equation
- ▶ solve
- ▶ construct the solution geometrically

For examples, see Katz (brief), §10.2, or Katz (3rd ed.), §14.2

Algebraic methods in geometry: some objections

Pierre de Fermat (1656, France):

I do not know why he has preferred this method with algebraic notation to the older way which is both more convincing and more elegant ...

Thomas Hobbes (1656, England):

... a scab of symbols ...

The beginnings of calculus: tangent methods

Calculus:

- ▶ finding tangents;
- ▶ finding areas.

Descartes' method for finding tangents (1637)

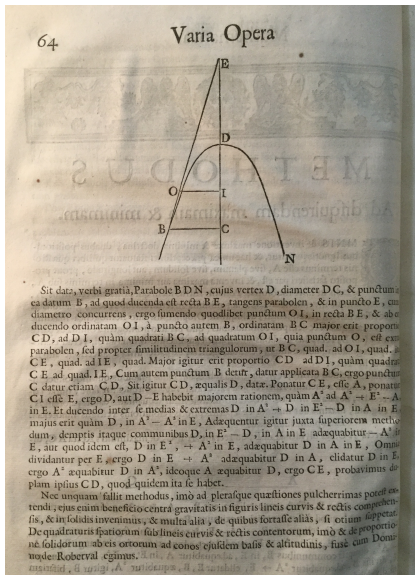
- ▶ based on finding a circle that touches the curve at the given point — a tangent to the circle is then a tangent to the curve
- ▶ used his algebraic approach geometry to find double roots to equation of intersection
- ▶ was in principle a general method — but laborious

Fermat's method for finding tangents

Pierre de Fermat (1601–1665):

- ▶ steeped in classical mathematics
- ▶ like Descartes, investigated problems of Pappus
- ▶ devised a tangent method (1629) quite different from that of Descartes

Fermat's tangent method (1629)



Worked out c. 1629, but only published posthumously in *Varia opera mathematica*, 1679.

See *Mathematics emerging*, §3.1.1.