BO1 History of Mathematics
Lecture III
Analytic geometry and the beginnings of calculus
Part 2: The appearance of symbolic notation

MT 2020 Week 2

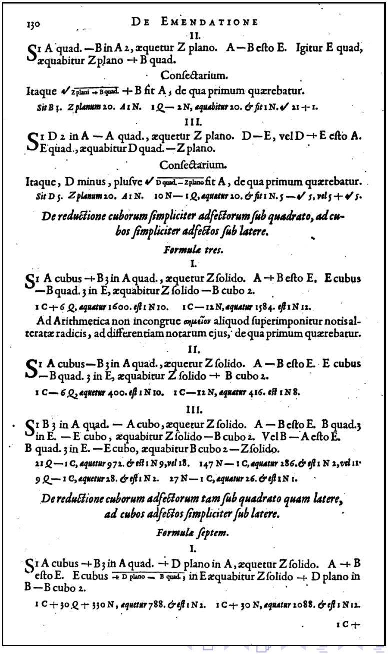
Notation: compare Cardano (*Ars magna*, 1545)...

Having raised a third part of the number of things to a cube, to which you add the square of half the number in the equation and take the root of the total, consider the square [root], which you will take twice; and to one of them you add half of the same, and you will have the binome with its apotome, whence taking the cube root of the apotome from the cube root of its binome, the difference that comes from this, is the value of the thing.

(*Mathematics emerging*, p. 327)

... with Viète (c. 1590)...

François Viète
(Francisci Vieta)
Opera mathematica
1646, p. 130



II.

SI A quad. — B in A 2, æquetur Z plano. A — B eſto E. Igitur E quad, æquabitur Z plano + B quad.

Conſectarium.

Itaque $\sqrt{\text{Z plani} + \text{B quad.}}$ + B fit A, de qua primum quærebatur.

Sit B 1. Z *planum* 20. A 1 N. 1 Q — 2 N, *æquabitur* 20. *& fit* 1 N. $\sqrt{21}$ + 1.

III.

SI D 2 in A — A quad., æquetur Z plano. D — E, vel D + E eſto A. E quad., æquabitur D quad. — Z plano.

Conſectarium.

Itaque, D minus, plusve $\sqrt{\text{D quad.} - \text{Z plano}}$ fit A, de qua primum quærebatur.

Sit D 5. Z *planum* 20. A 1 N. 10 N — 1 Q, *æquatur* 20. *& fit* 1 N. 5 — $\sqrt{5}$, *vel* 5 + $\sqrt{5}$.

De reductione cuborum ſimpliciter adfectorum ſub quadrato, ad cubos ſimpliciter adfectos ſub latere.

Formulæ tres.

I.

SI A cubus + B 3 in A quad., æquetur Z ſolido. A + B eſto E. E cubus — B quad. 3 in E, æquabitur Z ſolido — B cubo 2.

1 C + 6 Q, *æquatur* 1600. *eſt* 1 N 10. 1 C — 12 N, *æquatur* 1584. *eſt* 1 N 12.

Ad Arithmetica non incongrue σημεῖον aliquod ſuperimponitur notis alteratæ radicis, ad differentiam notarum ejus, de qua primum quærebatur.

II.

SI A cubus — B 3 in A quad., æquetur Z ſolido. A — B eſto E. E cubus — B quad. 3 in E, æquabitur Z ſolido + B cubo 2.

1 C — 6 Q, *æquetur* 400. *eſt* 1 N 10. 1 C — 12 N, *æquatur* 416. *eſt* 1 N 8.

III.

SI B 3 in A quad. — A cubo, æquetur Z ſolido. A — B eſto E. B quad. 3 in E. — E cubo, æquabitur Z ſolido — B cubo 2. Vel B — A eſto E. B quad. 3 in E. — E cubo, æquabitur B cubo 2 — Z ſolido.

21 Q — 1 C, *æquetur* 972. *& eſt* 1 N 9, *vel* 18. 147 N — 1 C, *æquatur* 286. *& eſt* 1 N 2, *vel* 11.

9 Q — 1 C, *æquetur* 28. *& eſt* 1 N 2. 27 N — 1 C, *æquatur* 26. *& eſt* 1 N 1.

De reductione cuborum adfectorum tam ſub quadrato quam latere, ad cubos adfectos ſimpliciter ſub latere.

Formulæ ſeptem.

I.

SI A cubus + B 3 in A quad. + D plano in A, æquetur Z ſolido. A + B eſto E. E cubus $\overline{+ \text{D plano} - \text{B quad. 3}}$ in E æquabitur Z ſolido + D plano in B — B cubo 2.

1 C + 30 Q + 330 N, *æquetur* 788. *& eſt* 1 N 2. 1 C + 30 N, *æquatur* 2088. *& eſt* 1 N 12.

1 C +

... with Viète (c. 1590)...

II.

SI A quad. — B in A 2, æquetur Z plano. A — B eſto E. Igitur E quad, æquabitur Z plano + B quad.

Conſectarium.

Itaque $\sqrt{\text{Z plani} + \text{B quad.}}$ + B fit A, de qua primum quærebatur.

Sit B 1. Z planum 20. A 1 N. 1 Q — 2 N, æquabitur 20. & fit 1 N. $\sqrt{21} + 1$.

III.

SI D 2 in A — A quad., æquetur Z plano. D — E, vel D + E eſto A. E quad., æquabitur D quad. — Z plano.

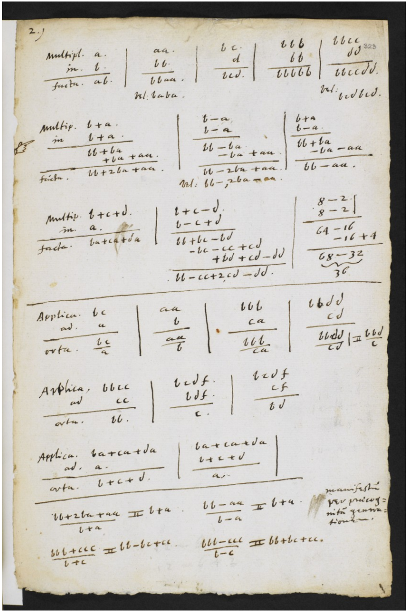
Conſectarium.

Itaque, D minus, pluſve $\sqrt{\text{D quad.} - \text{Z plano}}$ fit A, de qua primum quærebatur.

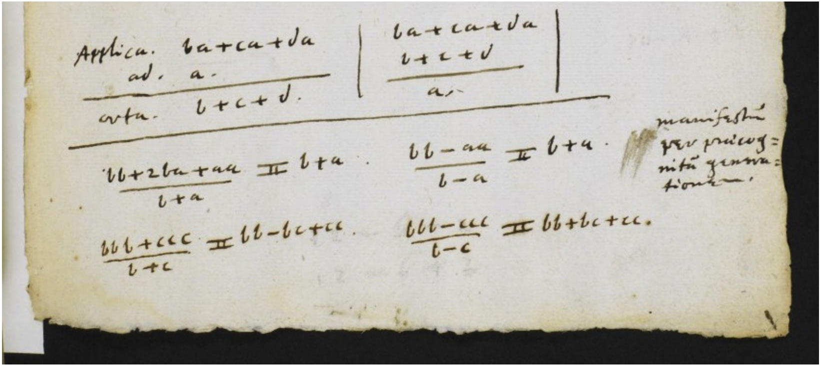
Sit D 5. Z planum 20. A 1 N. 10 N — 1 Q, æquatur 20. & fit 1 N. $5 - \sqrt{5}$, vel $5 + \sqrt{5}$.

... and with Harriot (c. 1600)

British Library
Add MS 6784 f. 323
available at
Thomas Harriot Online



… and with Harriot (c. 1600)



Applica. $ba+ca+da$
ad. a.
orta. $b+c+d$.

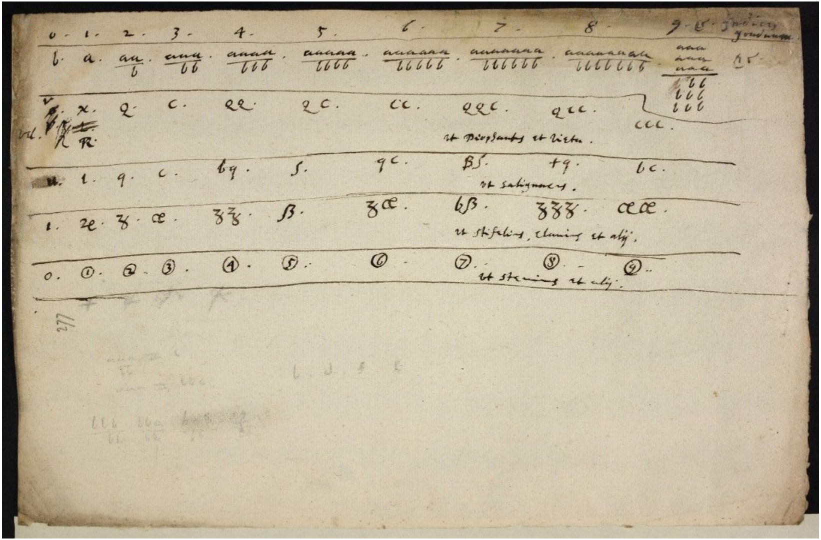
$$\frac{ba+ca+da}{b+c+d} \qquad a.$$

$$\frac{bb+2ba+aa}{b+a} = b+a. \qquad \frac{bb-aa}{b-a} = b+a.$$

manifestum per praecog=nitam genera=tionem.

$$\frac{bbb+ccc}{b+c} = bb-bc+cc. \qquad \frac{bbb-ccc}{b-c} = bb+bc+cc.$$

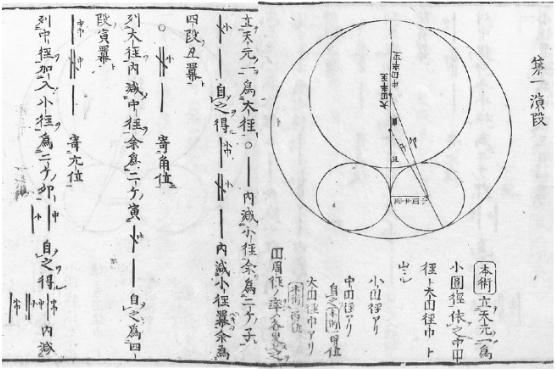
And here is Harriot's own comparison



British Library Add MS 6782 f. 277; Thomas Harriot Online

Elsewhere in the world

Seki Takakazu, *Hatsubi Sanpō* 発微算法 (1674), concerning the solution of equations in several variables:



Equations written using the technique of *bōshohō* 傍書法 ('side-writing'; a.k.a. *tenzan jutsu* 点竄術)

Notation: Viète (Tours, c. 1590)

François Viète (1540–1603, France):

A, E, ... (i.e., vowels) for unknowns

B, C, D, ... (i.e., consonants) for known or given quantities

symbols $+$, $-$

but otherwise verbal descriptions and connections: quadratum (squared), cubus (cubed), aequatur (be equal), ...

Notation: Harriot (London, c. 1600)

Thomas Harriot (1560–1621, England):

a, e, ... for unknowns

b, c, d, ... for known or given quantities

$+$, $-$

ab, aa, aaa

and many symbols: $=$, $>$, ...

(For another example of Harriot's use of notation, see *Mathematics emerging*, §2.2.1.)

Notation: Descartes (Netherlands, 1637)

René Descartes (1596–1650, France and Holland):

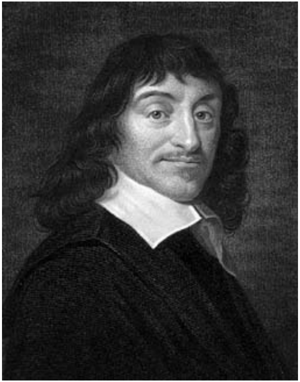
x, y, ... for unknowns

a, b, c, ... for known or given quantities

$+, -$

xx, x^3, x^4, ...

Descartes' notation was widely adopted, although his '$\propto$' for equality eventually gave way to '$=$', and his '$\surd C$' to '$\sqrt[3]{\ }$'.



Descartes' notation

tirer de cete ſcience. Auſſy que ie n'y remarque rien de ſi difficile, que ceux qui ſeront vn peu verſés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui eſt en ce traité, ne puiſſent trouuer.

C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

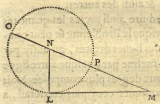
Quels ſont les problefmes plans

Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue.

Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$$z^{2} \infty a z + bb$$

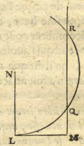


ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2} a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

angle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$$z \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}.$$

Que ſi iay $yy \infty - ay + bb$, & qu'y ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle N L M, & de ſa baze M N i'oſte N P eſgale a N L, & le reſte P M eſt y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty - \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^{4} \infty - a x^{2} + b^{2}$. P M ſeroit x^{2}. & i'aurois $x \infty \sqrt{- \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}}$: & ainſi des autres.



Enfin ſi i'ay

$$z^{2} \infty a z - bb:$$

ie fais N L eſgale à $\frac{1}{2} a$, & L M eſgale à b cóme deuāt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant deſcrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z eſt M Q, oubiē M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a ſçauoir $z \infty \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$, & $z \infty \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$.

Et ſi le cercle, qui ayant ſon centre au point N, paſſe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut aſſurer que la conſtruction du probleſme propoſé eſt impoſſible.

Au

Symbolism established in algebra

Frontispiece to: Johannes Faulhaber, *Ingenieurs-Schul, Anderer Theil*, Ulm, 1633 (on fortification)

See: Volker Remmert, ‘Antiquity, nobility, and utility: picturing the Early Modern mathematical sciences’, in *The Oxford handbook of the history of mathematics* (Eleanor Robson & Jacqueline Stedall, eds.), OUP, 2009, pp. 537–563