BO1 History of Mathematics
Lecture XI
19th-century rigour in real analysis
Part 2: Integration

MT 2020 Week 6

Integration

Integration

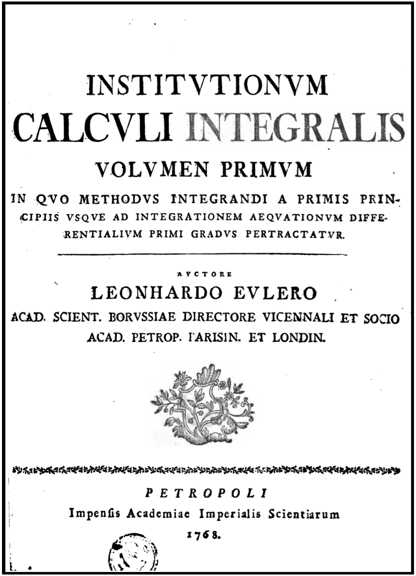
- Recall that in the 17th century, ‘integration’ was designed for ‘quadrature’, for measuring space or calculating area.

Integration

- Recall that in the 17th century, ‘integration’ was designed for ‘quadrature’, for measuring space or calculating area.

- In the 18th century, ‘integration’ was essentially regarded as the inverse of differentiation.

Integration in the 18th century (1)



INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM

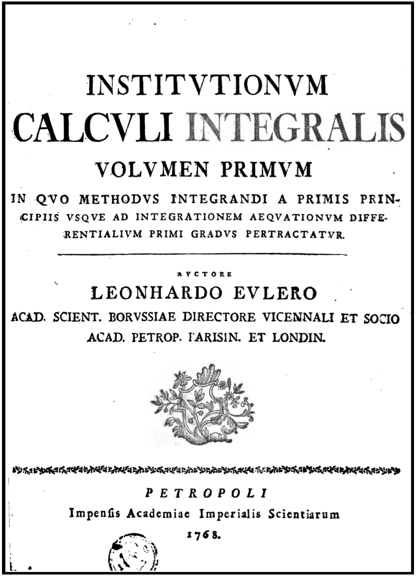
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI
Impenſis Academiae Imperialis Scientiarum
1768.

Leonhard Euler, *Foundations of integral calculus* (1768):

Integration in the 18th century (1)



INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

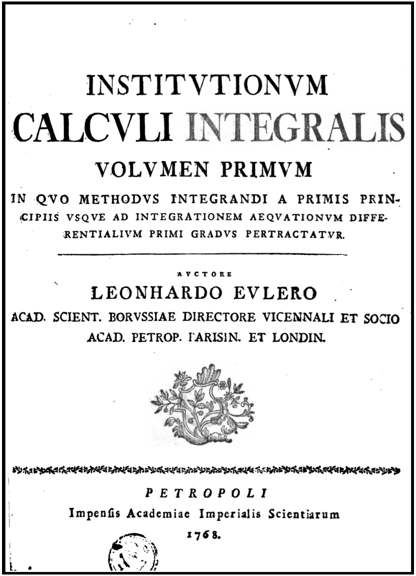
PETROPOLI
Impenſis Academiae Imperialis Scientiarum
1768.

Leonhard Euler, *Foundations of integral calculus* (1768):

Definition 1: Integral calculus is the method of finding, from a given relationship between differentials, a relationship between the quantities themselves: and the operation by which this is carried out is usually called integration.

(See *Mathematics emerging*, §14.2.1.)

Integration in the 18th century (2)



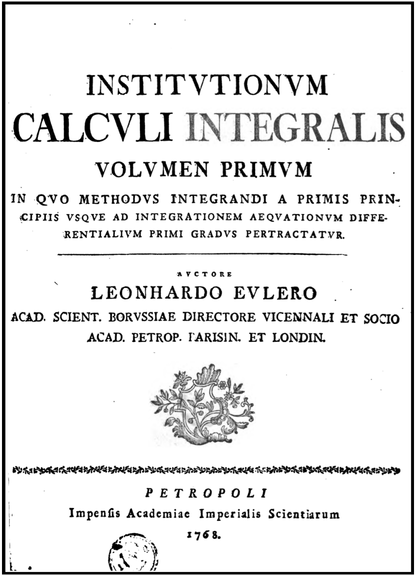
INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI
Impenſis Academiae Imperialis Scientiarum
1768.

Corollary 1: Therefore where differential calculus teaches us to investigate the relationship between differentials from a given relationship between variable quantities, integral calculus supplies the inverse method.

Integration in the 18th century (2)



INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI
Impenſis Academiae Imperialis Scientiarum
1768.

Corollary 1: Therefore where differential calculus teaches us to investigate the relationship between differentials from a given relationship between variable quantities, integral calculus supplies the inverse method.

Corollary 2: Clearly just as in Analysis two operations are always contrary to each other, as subtraction to addition, division to multiplication, extraction of roots to raising of powers, so also by similar reasoning integral calculus is contrary to differential calculus.

Integration in the 18th century (3)

ratione confcripti prodierint, huiusmodi conciliatio nullum vfum effet habitura.

Definitio 2.

7. Cum functionis cuiuscunque ipfius x differentiale huiusmodi habeat formam Xdx, propofita tali forma differentiali Xdx, in qua X fit functio quaecunque ipfius x, illa functio, cuius differentiale eft $= Xdx$, huius vocatur integrale, et praefixo figno $\int$ indicari folet, ita vt $\int Xdx$ eam denotet quantitatem variabilem, cuius differentiale eft $= Xdx$.

Coroll. 1.

8. Quemadmodum ergo propofitae formulae differentialis Xdx integrale, feu ea functio ipfius x, cuius differentiale eft $= Xdx$, quae hac fcriptura $\int Xdx$ indicatur, inueftigari debeat, in calculo integrali eft explicandum.

Coroll. 2.

9. Vti ergo littera d fignum eft differentiationis, ita littera $\int$ pro figno integrationis vtimur, ficque haec duo figna fibi mutuo opponuntur, et quafi fe deftruunt fcilicet $\int dX$ erit $= X$, quia ea quantitas denotatur cuius differentiale eft dX, quae vtique eft X.

Coroll. 3.

10. Cum igitur harum ipfius x functionum x^2, x^n, $\sqrt{(aa-xx)}$ differentialia fint $2xdx$, $nx^{n-1}dx$, $\frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ figno integrationis $\int$ adhibendo patet fore $\int 2x$

Definition 2: Since the differentiation of any function of x has a form of this kind: $X\,dx$, when such a differential form $X\,dx$ is proposed, in which X is any function of x, that function whose differential $= X\,dx$ is called its integral, and is usually indicated by the prefix $\int$, so that $\int X\,dx$ denotes that variable quantity whose differential $= X\,dx$.

Integration in the 18th century (3)

ratione conſcripti prodierint, huiusmodi conciliatio nullum vſum eſſet habitura.

Definitio 2.

7. Cum functionis cuiuscunque ipſius x differentiale huiusmodi habeat formam Xdx, propoſita tali forma differentiali Xdx, in qua X ſit functio quaecunque ipſius x, illa functio, cuius differentiale eſt $= Xdx$, huius vocatur integrale, et praefixo ſigno $\int$ indicari ſolet, ita vt $\int Xdx$ eam denotet quantitatem variabilem, cuius differentiale eſt $= Xdx$.

Coroll. 1.

8. Quemadmodum ergo propoſitae formulae differentialis Xdx integrale, ſeu ea functio ipſius x, cuius differentiale eſt $= Xdx$, quae hac ſcriptura $\int Xdx$ indicatur, inueſtigari debeat, in calculo integrali eſt explicandum.

Coroll. 2.

9. Vti ergo littera d ſignum eſt differentiationis, ita littera $\int$ pro ſigno integrationis vtimur, ſicque haec duo ſigna ſibi mutuo opponuntur, et quaſi ſe deſtruunt ſcilicet $\int dX$ erit $= X$, quia ea quantitas denotatur cuius differentiale eſt dX, quae vtique eſt X.

Coroll. 3.

10. Cum igitur harum ipſius x functionum $x^2, x^n, \sqrt{(aa-xx)}$ differentialia ſint $2xdx, nx^{n-1}dx, \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ ſigno integrationis $\int$ adhibendo patet fore $\int 2x$

Definition 2: Since the differentiation of any function of x has a form of this kind: $X\,dx$, when such a differential form $X\,dx$ is proposed, in which X is any function of x, that function whose differential $= X\,dx$ is called its integral, and is usually indicated by the prefix $\int$, so that $\int X\,dx$ denotes that variable quantity whose differential $= X\,dx$.

Corollary 2: Therefore just as the letter d is the sign of differentiation, so we use the letter $\int$ as the sign of integration, and thus these two signs are mutually contrary to each other, as though they destroy each other: certainly $\int dX = X$, ...

Integration in the 18th century (4)

Coroll. 3.

10. Cum igitur harum ipſius x functionum $x^2, x^n, \sqrt{(aa-xx)}$ differentialia ſint $2xdx, nx^{n-1}dx,$ $\frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ ſigno integrationis $\int$ adhibendo patet fore $\int 2xdx = xx; \int nx^{n-1}dx = x^n; \int \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \sqrt{(aa-xx)}$ vnde vſus huius ſigni clarius perſpicitur.

Some 19th-century ideas

Recall that Fourier coefficients are given by $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \phi(x)\sin nx\,dx$.

Some 19th-century ideas

Recall that Fourier coefficients are given by $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \phi(x)\sin nx\,dx$.

It is not always possible to solve such an integral algebraically.

Some 19th-century ideas

Recall that Fourier coefficients are given by $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \phi(x)\sin nx\,dx$.

It is not always possible to solve such an integral algebraically.

Fourier (1822): but we can draw the curve of $\phi(x)$, and hence that of $\phi(x)\sin nx$, under which there is clearly an area.

Some 19th-century ideas

Recall that Fourier coefficients are given by $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \phi(x) \sin nx \, dx$.

It is not always possible to solve such an integral algebraically.

Fourier (1822): but we can draw the curve of $\phi(x)$, and hence that of $\phi(x) \sin nx$, under which there is clearly an area.

Fourier thus returned to the idea of integral as area and influenced Cauchy almost immediately...

A theory of definite integrals (1823)

Cauchy's *Résumé*, 1823, Lesson 21:

A theory of definite integrals (1823)

Cauchy's *Résumé*, 1823, Lesson 21:

Suppose $f(x)$ *continuous between* $x = x_0$ *and* $x = X$. *Choose* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *between these limits. Define*

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

A theory of definite integrals (1823)

Cauchy's *Résumé*, 1823, Lesson 21:

Suppose $f(x)$ *continuous between* $x = x_0$ *and* $x = X$. *Choose* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *between these limits. Define*

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

[much discussion of dependence on partition followed by]

A theory of definite integrals (1823)

Cauchy's *Résumé*, 1823, Lesson 21:

Suppose $f(x)$ *continuous between* $x = x_0$ *and* $x = X$. *Choose* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *between these limits. Define*

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

[much discussion of dependence on partition followed by]

If the numerical values of the elements are made to decrease indefinitely by increasing their number, the value of S *will become essentially constant, or in other words, it will finish by attaining a certain limit which will depend only on the form of the function* $f(x)$ *and the boundary values* $x = x_0$, $x = X$ *given to the variable* x. *This limit is what one calls a definite integral.*

A theory of definite integrals (1823)

Cauchy's *Résumé*, 1823, Lesson 21:

Suppose $f(x)$ *continuous between* $x = x_0$ *and* $x = X$. *Choose* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *between these limits. Define*

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

[much discussion of dependence on partition followed by]

If the numerical values of the elements are made to decrease indefinitely by increasing their number, the value of S *will become essentially constant, or in other words, it will finish by attaining a certain limit which will depend only on the form of the function* $f(x)$ *and the boundary values* $x = x_0$, $x = X$ *given to the variable* x. *This limit is what one calls a definite integral.*

[further issues connected with uniform convergence]

Cauchy and integrals

Observons maintenant que, si l'on désigne par $\Delta x = h = dx$ un accroissement fini attribué à la variable x, les différens termes dont se compose la valeur de S, tels que les produits $(x_1 - x_0) f(x_0)$, $(x_2 - x_1) f(x_1)$, &c... seront tous compris dans la formule générale

$$(8) \qquad h f(x) = f(x)\, dx$$

de laquelle on les déduira l'un après l'autre, en posant d'abord $x = x_0$ et $h = x_1 - x_0$, puis $x = x_1$ et $h = x_2 - x_1$, &c... On peut donc énoncer que la quantité S est une somme de produits semblables à l'expression (8); ce qu'on exprime quelquefois à l'aide de la caractéristique Σ en écrivant

$$(9) \qquad S = \Sigma h f(x) = \Sigma f(x) \Delta x.$$

Quant à l'intégrale définie vers laquelle converge la quantité S, tandis que les élémens de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, on est convenu de la représenter par la notation $\int h f(x)$ ou $\int f(x) dx$, dans laquelle la lettre $\int$ substituée à la lettre Σ indique, non plus une somme de produits semblables à l'expression (8), mais la limite d'une somme de cette espèce. De plus, comme la valeur de l'intégrale définie que l'on considère dépend des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x, on est convenu de placer ces deux valeurs, la première au-dessous, la seconde au-dessus de la lettre $\int$, ou de les écrire à côté de l'intégrale, que l'on désigne en conséquence par l'une des notations

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx, \quad \int f(x)\, dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \quad \int f(x)\, dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}.$$

La première de ces notations, imaginée par M. *Fourier*, est la plus simple. Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est remplacée par une quantité constante a, on trouve, quel que soit le mode de division de la différence $X - x_0$, $\qquad S = a(X - x_0)$, $\qquad$ et l'on en conclut

$$(11) \qquad \int_{x_0}^{X} a\, dx = a(X - x_0),$$

Si, dans cette dernière formule on pose $a = 1$, on en tirera

$$(12) \qquad \int_{x_0}^{X} dx = X - x_0.$$

Cauchy and integrals

84 COURS D'ANALYSE.

Observons maintenant que, si l'on désigne par $\Delta x = h = dx$ un accroissement fini attribué à la variable x, les différens termes dont se compose la valeur de S, tels que les produits $(x_1 - x_0)f(x_0)$, $(x_2 - x_1)f(x_1)$, &c... seront tous compris dans la formule générale

$$(8) \qquad h f(x) = f(x)\, dx$$

de laquelle on les déduira l'un après l'autre, en posant d'abord $x = x_0$ et $h = x_1 - x_0$, puis $x = x_1$ et $h = x_2 - x_1$, &c... On peut donc énoncer que la quantité S est une somme de produits semblables à l'expression (8); ce qu'on exprime quelquefois à l'aide de la caractéristique Σ en écrivant

$$(9) \qquad S = \Sigma h f(x) = \Sigma f(x)\,\Delta x.$$

Quant à l'intégrale définie vers laquelle converge la quantité S, tandis que les élémens de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, on est convenu de la représenter par la notation $\int h f(x)$ ou $\int f(x)\,dx$, dans laquelle la lettre $\int$ substituée à la lettre Σ indique, non plus une somme de produits semblables à l'expression (8), mais la limite d'une somme de cette espèce. De plus, comme la valeur de l'intégrale définie que l'on considère dépend des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x, on est convenu de placer ces deux valeurs, la première au-dessous, la seconde au-dessus de la lettre $\int$, ou de les écrire à côté de l'intégrale, que l'on désigne en conséquence par l'une des notations

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}.$$

La première de ces notations, imaginée par M. *Fourier*, est la plus simple. Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est remplacée par une quantité constante a, on trouve, quel que soit le mode de division de la différence $X - x_0$, $\quad S = a(X - x_0)$, $\quad$ et l'on en conclut

$$(11) \qquad \int_{x_0}^{X} a\,dx = a(X - x_0),$$

Si, dans cette dernière formule on pose $a = 1$, on en tirera

$$(12) \qquad \int_{x_0}^{X} dx = X - x_0.$$

Is it valid to use the symbol $\int$ here?

Cauchy and the Fundamental Theorem of Calculus

COURS D'ANALYSE. 101

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

Intégrales indéfinies.

Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple, la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'*origine* $x = x_0$. Soit

(1) $$\mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) [22.e leçon]

(2) $$\mathcal{F}(x) = (x - x_0)\, f[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad \mathcal{F}(x_0) = 0,$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité; et de la formule (7) [23.e leçon]

$$\int_{x_0}^{x+a} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+a} f(x)\,dx = a\, f(x + \theta a), \quad \text{ou}$$

(3) $$\mathcal{F}(x + a) - \mathcal{F}(x) = a\, f(x + \theta a).$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathcal{F}(x)$ sera non-seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathcal{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il en sera de même de la fonction $\mathcal{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par a les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

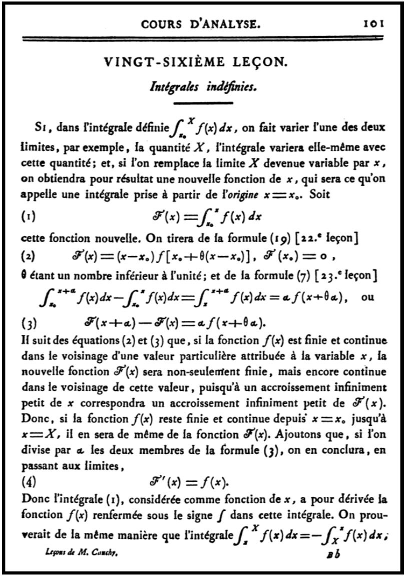
(4) $$\mathcal{F}'(x) = f(x).$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale. On prouverait de la même manière que l'intégrale $\int_{x}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x} f(x)\,dx$;

Leçons de M. Cauchy. Bb

If in the definite integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ one makes one of the two limits vary, for example the quantity X, the integral itself will vary with this quantity; and if one replaces the variable limit X by x, there results a new function of x, ...

Cauchy and the Fundamental Theorem of Calculus



COURS D'ANALYSE. 101

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

Intégrales indéfinies.

Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple, la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'*origine* $x=x_0$. Soit

(1) $$\mathscr{F}(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) [22.e leçon]

(2) $$\mathscr{F}(x)=(x-x_0)f[x_0+\theta(x-x_0)],\quad \mathscr{F}(x_0)=0,$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité; et de la formule (7) [23.e leçon]

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx=\alpha f(x+\theta\alpha),\quad \text{ou}$$

(3) $$\mathscr{F}(x+\alpha)-\mathscr{F}(x)=\alpha f(x+\theta\alpha).$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathscr{F}(x)$ sera non-seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathscr{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x=x_0$ jusqu'à $x=X$, il en sera de même de la fonction $\mathscr{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

(4) $$\mathscr{F}'(x)=f(x).$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale. On prouverait de la même manière que l'intégrale $\int_{x}^{X} f(x)\,dx=-\int_{X}^{x} f(x)\,dx$;

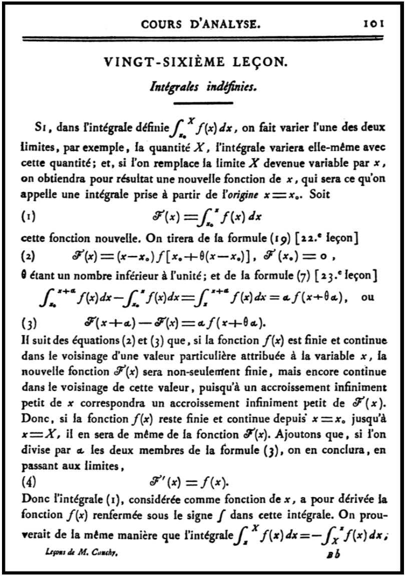
Leçons de M. Cauchy. Bb

Let

$$\mathscr{F}(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

be this new function.

Cauchy and the Fundamental Theorem of Calculus



COURS D'ANALYSE. 101

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

Intégrales indéfinies.

SI, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple, la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'*origine* $x = x_0$. Soit

(1) $$\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) [22.e leçon]

(2) $$\mathscr{F}(x) = (x - x_0)\, f[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad \mathscr{F}(x_0) = 0,$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité; et de la formule (7) [23.e leçon]

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta\alpha), \quad \text{ou}$$

(3) $$\mathscr{F}(x+\alpha) - \mathscr{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha).$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathscr{F}(x)$ sera non-seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathscr{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il en sera de même de la fonction $\mathscr{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

(4) $$\mathscr{F}'(x) = f(x).$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale. On prouverait de la même manière que l'intégrale $\int_{x}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x} f(x)\,dx$;

Leçons de M. Cauchy. Bb

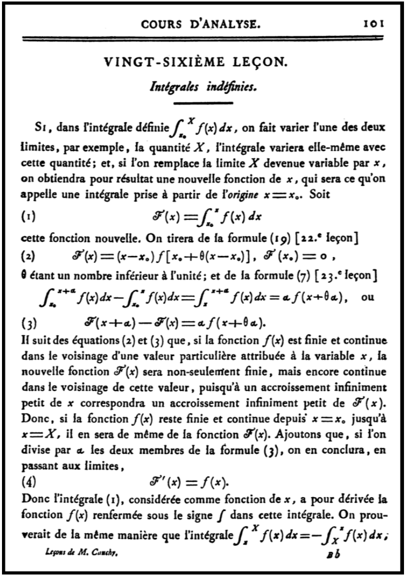
Let

$$\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

be this new function.

Proved that $\mathscr{F}'(x) = f(x)$,

Cauchy and the Fundamental Theorem of Calculus



COURS D'ANALYSE. 101

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

Intégrales indéfinies.

SI, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple, la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'*origine* $x = x_0$. Soit

(1) $$\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) [22.e leçon]

(2) $$\mathscr{F}(x) = (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad \mathscr{F}(x_0) = 0,$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité; et de la formule (7) [23.e leçon]

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx = \alpha f(x + \theta\alpha), \quad \text{ou}$$

(3) $$\mathscr{F}(x+\alpha) - \mathscr{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha).$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathscr{F}(x)$ sera non-seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathscr{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il en sera de même de la fonction $\mathscr{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

(4) $$\mathscr{F}'(x) = f(x).$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale. On prouverait de la même manière que l'intégrale $\int_{x}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x} f(x)\,dx$;

Leçons de M. Cauchy. Bb

Let

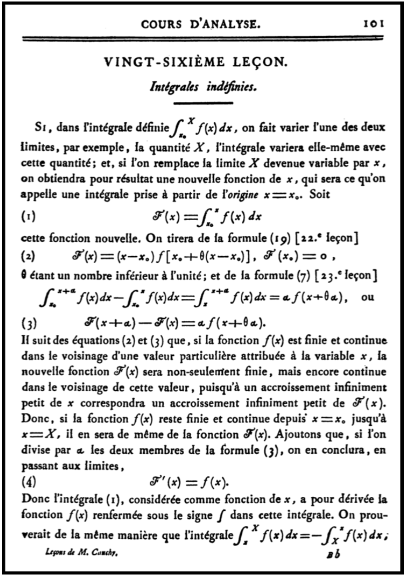
$$\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

be this new function.

Proved that $\mathscr{F}'(x) = f(x)$, and also that

$$\varpi'(x) = 0 \Rightarrow \varpi(x) = \text{const},$$

Cauchy and the Fundamental Theorem of Calculus



COURS D'ANALYSE. 101

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

Intégrales indéfinies.

Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple, la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'*origine* $x = x_0$. Soit

(1) $$\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) [22.^{e} leçon]

(2) $$\mathscr{F}(x) = (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad \mathscr{F}(x_0) = 0,$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité; et de la formule (7) [23.^{e} leçon]

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta\alpha), \quad \text{ou}$$

(3) $$\mathscr{F}(x+\alpha) - \mathscr{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha).$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathscr{F}(x)$ sera non-seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathscr{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il en sera de même de la fonction $\mathscr{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

(4) $$\mathscr{F}'(x) = f(x).$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale. On prouverait de la même manière que l'intégrale $\int_{x}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x} f(x)\,dx$;

Leçons de M. Cauchy. Bb

Let

$$\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

be this new function.

Proved that $\mathscr{F}'(x) = f(x)$, and also that

$$\varpi'(x) = 0 \Rightarrow \varpi(x) = \text{const},$$

which may be used to show that if $F'(x) = f(x)$, then

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

The Fundamental Theorem of Calculus

What is the Fundamental Theorem of Calculus?

The Fundamental Theorem of Calculus

What is the Fundamental Theorem of Calculus?

- integration is the inverse of differentiation?

The Fundamental Theorem of Calculus

What is the Fundamental Theorem of Calculus?

- integration is the inverse of differentiation?
- integration ‘as a sum’ is the same as integration ‘by rule’?

The Fundamental Theorem of Calculus

What is the Fundamental Theorem of Calculus?

- integration is the inverse of differentiation?
- integration ‘as a sum’ is the same as integration ‘by rule’?
- Cauchy’s integration is the same as Euler’s integration?

The Fundamental Theorem of Calculus

What is the Fundamental Theorem of Calculus?

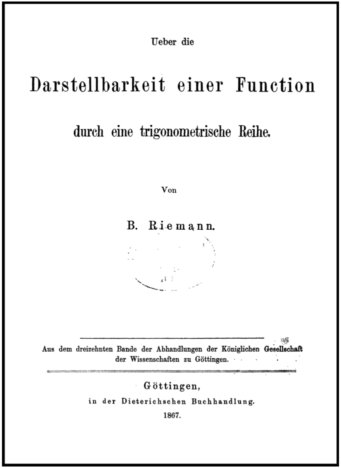
- integration is the inverse of differentiation?
- integration 'as a sum' is the same as integration 'by rule'?
- Cauchy's integration is the same as Euler's integration?
- 19th-century integration is the same as 18th-century integration?

The Fundamental Theorem of Calculus

What is the Fundamental Theorem of Calculus?

- integration is the inverse of differentiation?
- integration 'as a sum' is the same as integration 'by rule'?
- Cauchy's integration is the same as Euler's integration?
- 19th-century integration is the same as 18th-century integration?
- ...

Bernhard Riemann (1826–1866)



Ueber die

Darstellbarkeit einer Function

durch eine trigonometrische Reihe.

Von

B. Riemann.

Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Göttingen,
in der Dieterichschen Buchhandlung.
1867.

Riemann's integral (1853)

Function $f(x)$ no longer required to be continuous on $[a, b]$.

Riemann's integral (1853)

Function $f(x)$ no longer required to be continuous on $[a, b]$. Take $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$. Define $\delta_1 := x_1 - a$, $\delta_2 := x_2 - x_1$, ..., $\delta_n := b - x_{n-1}$.

Riemann's integral (1853)

Function $f(x)$ no longer required to be continuous on $[a, b]$. Take $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$. Define $\delta_1 := x_1 - a$, $\delta_2 := x_2 - x_1$, ..., $\delta_n := b - x_{n-1}$. Choose numbers ε_i between 0 and 1. Then define

$$\begin{aligned} S := \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) \\ + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(a_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n) \end{aligned}$$

Riemann's integral (1853)

Function $f(x)$ no longer required to be continuous on $[a, b]$. Take $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$. Define $\delta_1 := x_1 - a$, $\delta_2 := x_2 - x_1$, ..., $\delta_n := b - x_{n-1}$. Choose numbers ε_i between 0 and 1. Then define

$$S := \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) \\ + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(a_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

If this has the property that it comes infinitely close to a fixed value A when all the δ_i become infinitely small, then this is the value of $\int_a^b f(x)\, dx$.

Riemann's integral (1853)

Function $f(x)$ no longer required to be continuous on $[a, b]$. Take $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$. Define $\delta_1 := x_1 - a$, $\delta_2 := x_2 - x_1$, ..., $\delta_n := b - x_{n-1}$. Choose numbers ε_i between 0 and 1. Then define

$$S := \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) \\ + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(a_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

If this has the property that it comes infinitely close to a fixed value A when all the δ_i become infinitely small, then this is the value of $\int_a^b f(x)\,dx$.

Many variants over the years, all called Riemann integral.

Lebesgue's integral (1901)

Considers step functions on subsets that are not necessarily intervals, thus requiring the notion of a measure (Borel, 1894).

Lebesgue's integral (1901)

Considers step functions on subsets that are not necessarily intervals, thus requiring the notion of a measure (Borel, 1894).

Results in a notion of integral of wider applicability than Riemann's;

Lebesgue's integral (1901)

Considers step functions on subsets that are not necessarily intervals, thus requiring the notion of a measure (Borel, 1894).

Results in a notion of integral of wider applicability than Riemann's; for example:

can integrate highly discontinuous functions, such as the Dirichlet function:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational;} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$