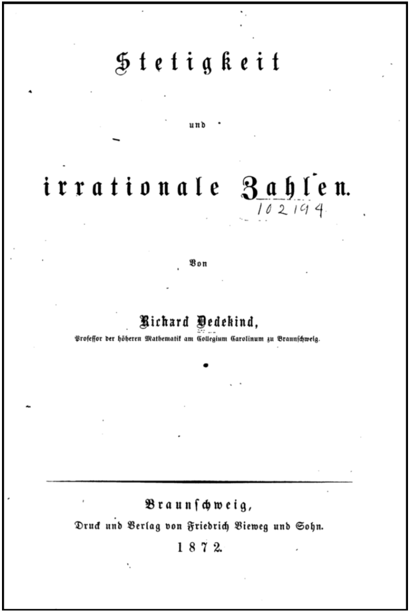
BO1 History of Mathematics
Lecture XII
19th-century rigour in real analysis, continued
Part 2: Real numbers

MT 2020 Week 6

Richard Dedekind (1831–1916)



Stetigkeit

und

irrationale Zahlen.

102194

Von

Richard Dedekind,

Professor der höheren Mathematik am Collegium Carolinum zu Braunschweig.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1872.

Dedekind and the foundations of analysis

Teaching calculus in the Zürich Polytechnic (1858), later (from 1862) teaching Fourier series in the Braunschweig Polytechnic, found himself dissatisfied with:

Dedekind and the foundations of analysis

Teaching calculus in the Zürich Polytechnic (1858), later (from 1862) teaching Fourier series in the Braunschweig Polytechnic, found himself dissatisfied with:

- geometry as a foundation for analysis;

Dedekind and the foundations of analysis

Teaching calculus in the Zürich Polytechnic (1858), later (from 1862) teaching Fourier series in the Braunschweig Polytechnic, found himself dissatisfied with:

- geometry as a foundation for analysis;
- tacit assumptions about convergence (for monotonic bounded sequences, for example).

Dedekind and the foundations of analysis

Teaching calculus in the Zürich Polytechnic (1858), later (from 1862) teaching Fourier series in the Braunschweig Polytechnic, found himself dissatisfied with:

- geometry as a foundation for analysis;
- tacit assumptions about convergence (for monotonic bounded sequences, for example).

Response eventually published in *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) [translated as *Continuity and irrational numbers* by Wooster Woodruff Beman, 1901]

Dedekind and continuity (1)

Intuition suggests that numbers (an arithmetical concept) should have the same completeness and continuity properties as a line (a geometrical concept).

Dedekind and continuity (1)

Intuition suggests that numbers (an arithmetical concept) should have the same completeness and continuity properties as a line (a geometrical concept). But we must define these concepts for numbers without appeal to geometrical intuition.

Dedekind and continuity (1)

Intuition suggests that numbers (an arithmetical concept) should have the same completeness and continuity properties as a line (a geometrical concept). But we must define these concepts for numbers without appeal to geometrical intuition.

Geometrically, every point separates a line into two parts.

Dedekind and continuity (1)

Intuition suggests that numbers (an arithmetical concept) should have the same completeness and continuity properties as a line (a geometrical concept). But we must define these concepts for numbers without appeal to geometrical intuition.

Geometrically, every point separates a line into two parts.

> *I find the essence of continuity in the converse, i.e., in the following principle:*
>
> *"If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points into two classes, this severing of the straight line into two portions."*

Dedekind and continuity (2)

But Dedekind couldn't *prove* this property, so he had to take it as an axiom:

> *The assumption of this property for the line is nothing but an Axiom, through which alone we attribute continuity to the line, through which we understand continuity in the line.*

(See *Mathematics emerging*, §16.3.2.)

Dedekind and continuity (3)

Next adapt this idea to the arithmetical context:

Dedekind and continuity (3)

Next adapt this idea to the arithmetical context:

- every number x separates all other numbers into two classes — those greater than x, and those less than x;

Dedekind and continuity (3)

Next adapt this idea to the arithmetical context:

- every number x separates all other numbers into two classes — those greater than x, and those less than x;
- conversely, every such separation of numbers defines a number.

Dedekind and continuity (3)

Next adapt this idea to the arithmetical context:

- every number x separates all other numbers into two classes — those greater than x, and those less than x;
- conversely, every such separation of numbers defines a number.

Hence Dedekind cuts (or sections, from the original German Schnitt).

Dedekind cuts (1)

- Start from the system of rational numbers R (assumed known)

Dedekind cuts (1)

- Start from the system of rational numbers R (assumed known)

- Separate R into two classes A_1 and A_2 such that
  - for any a_1 in A_1, $a_1 < a_2$ for every a_2 in A_2
  - for any a_2 in A_2, $a_2 > a_1$ for every a_1 in A_1

Dedekind cuts (1)

- Start from the system of rational numbers R (assumed known)
- Separate R into two classes A_1 and A_2 such that
  - for any a_1 in A_1, $a_1 < a_2$ for every a_2 in A_2
  - for any a_2 in A_2, $a_2 > a_1$ for every a_1 in A_1
- The cut denoted by (A_1, A_2) defines a number

Dedekind cuts (1)

- Start from the system of rational numbers R (assumed known)
- Separate R into two classes A_1 and A_2 such that
  - for any a_1 in A_1, $a_1 < a_2$ for every a_2 in A_2
  - for any a_2 in A_2, $a_2 > a_1$ for every a_1 in A_1
- The cut denoted by (A_1, A_2) defines a number
- Important observation: (A_1, A_2) need not be rational

Dedekind cuts (1)

- Start from the system of rational numbers R (assumed known)

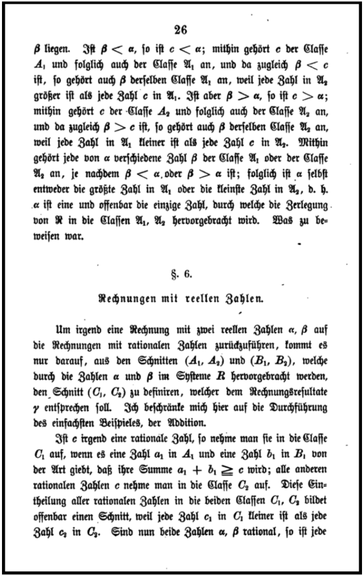
- Separate R into two classes A_1 and A_2 such that
  - for any a_1 in A_1, $a_1 < a_2$ for every a_2 in A_2
  - for any a_2 in A_2, $a_2 > a_1$ for every a_1 in A_1

- The cut denoted by (A_1, A_2) defines a number

- Important observation: (A_1, A_2) need not be rational

  Whenever, then, we have to do with a cut produced by no rational number, we create a new irrational number, which we regard as completely defined by this cut ...

Dedekind cuts (2)



26

β liegen. Ist $\beta < \alpha$, so ist $c < \alpha$; mithin gehört c der Classe A_1 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_1$ an, und da zugleich $\beta < c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_1$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_2$ größer ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_1$. Ist aber $\beta > \alpha$, so ist $c > \alpha$; mithin gehört c der Classe A_2 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, und da zugleich $\beta > c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_2$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_2$. Mithin gehört jede von α verschiedene Zahl β der Classe $\mathfrak{A}_1$ oder der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, je nachdem $\beta < \alpha$ oder $\beta > \alpha$ ist; folglich ist α selbst entweder die größte Zahl in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$, d. h. α ist eine und offenbar die einzige Zahl, durch welche die Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in die Classen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ hervorgebracht wird. Was zu beweisen war.

§. 6.

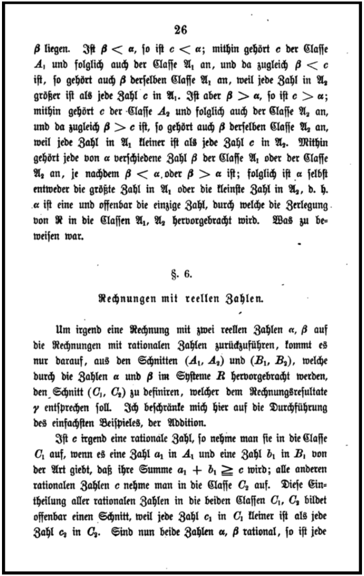
Rechnungen mit reellen Zahlen.

Um irgend eine Rechnung mit zwei reellen Zahlen α, β auf die Rechnungen mit rationalen Zahlen zurückzuführen, kommt es nur darauf, aus den Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2), welche durch die Zahlen α und β im Systeme R hervorgebracht werden, den Schnitt (C_1, C_2) zu definiren, welcher dem Rechnungsresultate γ entsprechen soll. Ich beschränke mich hier auf die Durchführung des einfachsten Beispieles, der Addition.

Ist c irgend eine rationale Zahl, so nehme man sie in die Classe C_1 auf, wenn es eine Zahl a_1 in A_1 und eine Zahl b_1 in B_1 von der Art giebt, daß ihre Summe $a_1 + b_1 \geq c$ wird; alle anderen rationalen Zahlen c nehme man in die Classe C_2 auf. Diese Eintheilung aller rationalen Zahlen in die beiden Classen C_1, C_2 bildet offenbar einen Schnitt, weil jede Zahl c_1 in C_1 kleiner ist als jede Zahl c_2 in C_2. Sind nun beide Zahlen α, β rational, so ist jede

Dedekind showed how to add two cuts, and how to use them in limiting arguments — but did little else with them.

Dedekind cuts (2)



26

β liegen. Ist $\beta < \alpha$, so ist $c < \alpha$; mithin gehört c der Classe A_1 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_1$ an, und da zugleich $\beta < c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_1$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_2$ größer ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_1$. Ist aber $\beta > \alpha$, so ist $c > \alpha$; mithin gehört c der Classe A_2 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, und da zugleich $\beta > c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_2$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_2$. Mithin gehört jede von α verschiedene Zahl β der Classe $\mathfrak{A}_1$ oder der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, je nachdem $\beta < \alpha$ oder $\beta > \alpha$ ist; folglich ist α selbst entweder die größte Zahl in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$, d. h. α ist eine und offenbar die einzige Zahl, durch welche die Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in die Classen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ hervorgebracht wird. Was zu beweisen war.

§. 6.

Rechnungen mit reellen Zahlen.

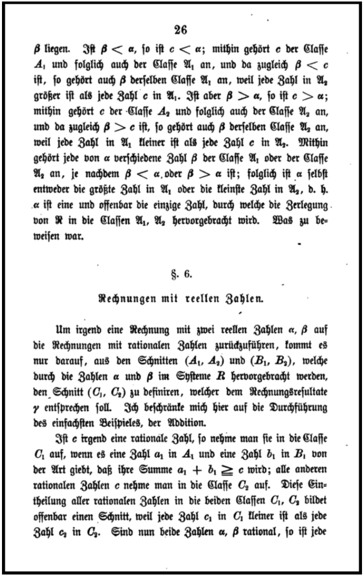
Um irgend eine Rechnung mit zwei reellen Zahlen α, β auf die Rechnungen mit rationalen Zahlen zurückzuführen, kommt es nur darauf, aus den Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2), welche durch die Zahlen α und β im Systeme R hervorgebracht werden, den Schnitt (C_1, C_2) zu definiren, welcher dem Rechnungsresultate γ entsprechen soll. Ich beschränke mich hier auf die Durchführung des einfachsten Beispieles, der Addition.

Ist c irgend eine rationale Zahl, so nehme man sie in die Classe C_1 auf, wenn es eine Zahl a_1 in A_1 und eine Zahl b_1 in B_1 von der Art giebt, daß ihre Summe $a_1 + b_1 \geq c$ wird; alle anderen rationalen Zahlen c nehme man in die Classe C_2 auf. Diese Eintheilung aller rationalen Zahlen in die beiden Classen C_1, C_2 bildet offenbar einen Schnitt, weil jede Zahl c_1 in C_1 kleiner ist als jede Zahl c_2 in C_2. Sind nun beide Zahlen α, β rational, so ist jede

Dedekind showed how to add two cuts, and how to use them in limiting arguments — but did little else with them.

Significance: a major step towards

Dedekind cuts (2)



26

β liegen. Ist $\beta < \alpha$, so ist $c < \alpha$; mithin gehört c der Classe A_1 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_1$ an, und da zugleich $\beta < c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_1$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_2$ größer ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_1$. Ist aber $\beta > \alpha$, so ist $c > \alpha$; mithin gehört c der Classe A_2 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, und da zugleich $\beta > c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_2$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_2$. Mithin gehört jede von α verschiedene Zahl β der Classe $\mathfrak{A}_1$ oder der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, je nachdem $\beta < \alpha$ oder $\beta > \alpha$ ist; folglich ist α selbst entweder die größte Zahl in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$, d. h. α ist eine und offenbar die einzige Zahl, durch welche die Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in die Classen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ hervorgebracht wird. Was zu beweisen war.

§. 6.

Rechnungen mit reellen Zahlen.

Um irgend eine Rechnung mit zwei reellen Zahlen α, β auf die Rechnungen mit rationalen Zahlen zurückzuführen, kommt es nur darauf, aus den Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2), welche durch die Zahlen α und β im Systeme R hervorgebracht werden, den Schnitt (C_1, C_2) zu definiren, welcher dem Rechnungsresultate γ entsprechen soll. Ich beschränke mich hier auf die Durchführung des einfachsten Beispieles, der Addition.

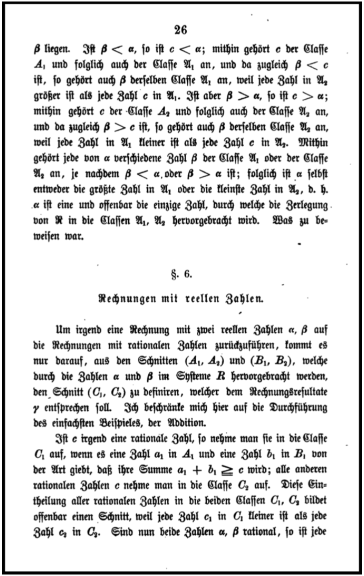
Ist c irgend eine rationale Zahl, so nehme man sie in die Classe C_1 auf, wenn es eine Zahl a_1 in A_1 und eine Zahl b_1 in B_1 von der Art giebt, daß ihre Summe $a_1 + b_1 \geq c$ wird; alle anderen rationalen Zahlen c nehme man in die Classe C_2 auf. Diese Eintheilung aller rationalen Zahlen in die beiden Classen C_1, C_2 bildet offenbar einen Schnitt, weil jede Zahl c_1 in C_1 kleiner ist als jede Zahl c_2 in C_2. Sind nun beide Zahlen α, β rational, so ist jede

Dedekind showed how to add two cuts, and how to use them in limiting arguments — but did little else with them.

Significance: a major step towards

- understanding completeness, and

Dedekind cuts (2)



26

β liegen. Ist $\beta < \alpha$, so ist $c < \alpha$; mithin gehört c der Classe A_1 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_1$ an, und da zugleich $\beta < c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_1$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_2$ größer ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_1$. Ist aber $\beta > \alpha$, so ist $c > \alpha$; mithin gehört c der Classe A_2 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, und da zugleich $\beta > c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_2$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_2$. Mithin gehört jede von α verschiedene Zahl β der Classe $\mathfrak{A}_1$ oder der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, je nachdem $\beta < \alpha$ oder $\beta > \alpha$ ist; folglich ist α selbst entweder die größte Zahl in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$, d. h. α ist eine und offenbar die einzige Zahl, durch welche die Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in die Classen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ hervorgebracht wird. Was zu beweisen war.

§. 6.

Rechnungen mit reellen Zahlen.

Um irgend eine Rechnung mit zwei reellen Zahlen α, β auf die Rechnungen mit rationalen Zahlen zurückzuführen, kommt es nur darauf, aus den Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2), welche durch die Zahlen α und β im Systeme R hervorgebracht werden, den Schnitt (C_1, C_2) zu definiren, welcher dem Rechnungsresultate γ entsprechen soll. Ich beschränke mich hier auf die Durchführung des einfachsten Beispieles, der Addition.

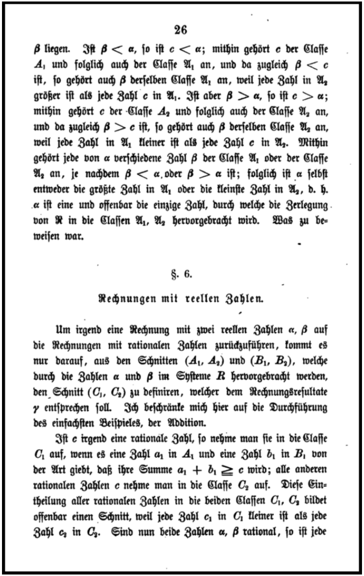
Ist c irgend eine rationale Zahl, so nehme man sie in die Classe C_1 auf, wenn es eine Zahl a_1 in A_1 und eine Zahl b_1 in B_1 von der Art giebt, daß ihre Summe $a_1 + b_1 \geqq c$ wird; alle anderen rationalen Zahlen c nehme man in die Classe C_2 auf. Diese Eintheilung aller rationalen Zahlen in die beiden Classen C_1, C_2 bildet offenbar einen Schnitt, weil jede Zahl c_1 in C_1 kleiner ist als jede Zahl c_2 in C_2. Sind nun beide Zahlen α, β rational, so ist jede

Dedekind showed how to add two cuts, and how to use them in limiting arguments — but did little else with them.

Significance: a major step towards

- understanding completeness, and
- giving a rigorous definition of an irrational number, hence

Dedekind cuts (2)



β liegen. Ist $\beta < \alpha$, so ist $c < \alpha$; mithin gehört c der Classe A_1 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_1$ an, und da zugleich $\beta < c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_1$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_2$ größer ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_1$. Ist aber $\beta > \alpha$, so ist $c > \alpha$; mithin gehört c der Classe A_2 und folglich auch der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, und da zugleich $\beta > c$ ist, so gehört auch β derselben Classe $\mathfrak{A}_2$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_2$. Mithin gehört jede von α verschiedene Zahl β der Classe $\mathfrak{A}_1$ oder der Classe $\mathfrak{A}_2$ an, je nachdem $\beta < \alpha$ oder $\beta > \alpha$ ist; folglich ist α selbst entweder die größte Zahl in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$, d. h. α ist eine und offenbar die einzige Zahl, durch welche die Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in die Classen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ hervorgebracht wird. Was zu beweisen war.

§. 6.

Rechnungen mit reellen Zahlen.

Um irgend eine Rechnung mit zwei reellen Zahlen α, β auf die Rechnungen mit rationalen Zahlen zurückzuführen, kommt es nur darauf, aus den Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2), welche durch die Zahlen α und β im Systeme R hervorgebracht werden, den Schnitt (C_1, C_2) zu definiren, welcher dem Rechnungsresultate γ entsprechen soll. Ich beschränke mich hier auf die Durchführung des einfachsten Beispieles, der Addition.

Ist c irgend eine rationale Zahl, so nehme man sie in die Classe C_1 auf, wenn es eine Zahl a_1 in A_1 und eine Zahl b_1 in B_1 von der Art giebt, daß ihre Summe $a_1 + b_1 \geq c$ wird; alle anderen rationalen Zahlen c nehme man in die Classe C_2 auf. Diese Eintheilung aller rationalen Zahlen in die beiden Classen C_1, C_2 bildet offenbar einen Schnitt, weil jede Zahl c_1 in C_1 kleiner ist als jede Zahl c_2 in C_2. Sind nun beide Zahlen α, β rational, so ist jede

Dedekind showed how to add two cuts, and how to use them in limiting arguments — but did little else with them.

Significance: a major step towards

- understanding completeness, and
- giving a rigorous definition of an irrational number, hence
- setting the foundations of analysis onto a sound logical basis.

Dissemination of Dedekind's ideas

Stetigkeit und irrationale Zahlen reprinted many times, often in conjunction with the later essay *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) [see below].

Dissemination of Dedekind's ideas

Stetigkeit und irrationale Zahlen reprinted many times, often in conjunction with the later essay *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) [see below].

Translated into English as *Essays on the theory of numbers* by Wooster Woodruff Beman (1901).

Dissemination of Dedekind's ideas

Stetigkeit und irrationale Zahlen reprinted many times, often in conjunction with the later essay *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) [see below].

Translated into English as *Essays on the theory of numbers* by Wooster Woodruff Beman (1901).

Popularised and organised for teaching, starting from Peano axioms for natural numbers, by Edmund Landau in *Grundlagen der Analysis* [*Foundations of analysis*] (1930), a book that contains very few words.

Dissemination of Dedekind's ideas

Stetigkeit und irrationale Zahlen reprinted many times, often in conjunction with the later essay *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) [see below].

Translated into English as *Essays on the theory of numbers* by Wooster Woodruff Beman (1901).

Popularised and organised for teaching, starting from Peano axioms for natural numbers, by Edmund Landau in *Grundlagen der Analysis* [*Foundations of analysis*] (1930), a book that contains very few words.

A good modern (historically sensitive) account can be found in: Leo Corry, *A brief history of numbers*, OUP, 2015, §10.6.

Other approaches

Georg Cantor (1872) and Eduard Heine (1872) created real numbers as equivalence classes of Cauchy sequences of rational numbers. (Also: Charles Méray in 1869.)

Other approaches

Georg Cantor (1872) and Eduard Heine (1872) created real numbers as equivalence classes of Cauchy sequences of rational numbers. (Also: Charles Méray in 1869.)

(On Cantor's approach, see *Mathematics emerging*, §16.3.3.)

Other approaches

Georg Cantor (1872) and Eduard Heine (1872) created real numbers as equivalence classes of Cauchy sequences of rational numbers. (Also: Charles Méray in 1869.)

(On Cantor's approach, see *Mathematics emerging*, §16.3.3.)

Heine acknowledged a debt to Cantor and a debt to the lectures of Weierstrass.

Other approaches

Georg Cantor (1872) and Eduard Heine (1872) created real numbers as equivalence classes of Cauchy sequences of rational numbers. (Also: Charles Méray in 1869.)

(On Cantor's approach, see *Mathematics emerging*, §16.3.3.)

Heine acknowledged a debt to Cantor and a debt to the lectures of Weierstrass.

Later constructions by many mathematicians and philosophers — such as

- Carl Johannes Thomae, 1880, 1890;
- Giuseppe Peano, 1889, 1891;
- Gottlob Frege, 1884, 1893, 1903;
- Otto Hölder, 1901;
- ...

Extreme formalism

$*110\cdot632.\ \vdash : \mu \epsilon \mathrm{NC} . \supset . \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \epsilon \xi . \xi - \iota ‘y \epsilon \mathrm{sm}“\mu\}$

Dem.

$\vdash . *110\cdot631 . *51\cdot211\cdot22 . \supset$

$\vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists\gamma, y) . \gamma \epsilon \mathrm{sm}“\mu . y \epsilon \xi . \gamma = \xi - \iota ‘y\}$

$[*13\cdot195] \quad = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \epsilon \xi . \xi - \iota ‘y \epsilon \mathrm{sm}“\mu\} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*110\cdot64.\ \vdash . 0 +_c 0 = 0 \quad [*110\cdot62]$

$*110\cdot641.\ \vdash . 1 +_c 0 = 0 +_c 1 = 1 \quad [*110\cdot51\cdot61 . *101\cdot2]$

$*110\cdot642.\ \vdash . 2 +_c 0 = 0 +_c 2 = 2 \quad [*110\cdot51\cdot61 . *101\cdot31]$

$*110\cdot643.\ \vdash . 1 +_c 1 = 2$

Dem.

$\vdash . *110\cdot632 . *101\cdot21\cdot28 . \supset$

$\vdash . 1 +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \epsilon \xi . \xi - \iota ‘y \epsilon 1\}$

$[*54\cdot3] \quad = 2 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

The above proposition is occasionally useful. It is used at least three times, in $*113\cdot66$ and $*120\cdot123\cdot472$.

$*110\cdot7\cdot71$ are required for proving $*110\cdot72$, and $*110\cdot72$ is used in $*117\cdot3$, which is a fundamental proposition in the theory of greater and less.

$*110\cdot7.\ \vdash : \beta \subset \alpha . \supset . (\exists\mu) . \mu \epsilon \mathrm{NC} . \mathrm{Nc}‘\alpha = \mathrm{Nc}‘\beta +_c \mu$

Dem.

$\vdash . *24\cdot411\cdot21 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha = \beta \cup (\alpha - \beta) . \beta \cap (\alpha - \beta) = \Lambda .$

$[*110\cdot32] \quad \supset . \mathrm{Nc}‘\alpha = \mathrm{Nc}‘\beta +_c \mathrm{Nc}‘(\alpha - \beta) : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*110\cdot71.\ \vdash : (\exists\mu) . \mathrm{Nc}‘\alpha = \mathrm{Nc}‘\beta +_c \mu . \supset . (\exists\delta) . \delta \,\mathrm{sm}\, \beta . \delta \subset \alpha$

Dem.

$\vdash . *100\cdot3 . *110\cdot4 . \supset$

$\vdash : \mathrm{Nc}‘\alpha = \mathrm{Nc}‘\beta +_c \mu . \supset . \mu \epsilon \mathrm{NC} - \iota ‘\Lambda \quad (1)$

$\vdash . *110\cdot3 . \supset \vdash : \mathrm{Nc}‘\alpha = \mathrm{Nc}‘\beta +_c \mathrm{Nc}‘\gamma . \equiv . \mathrm{Nc}‘\alpha = \mathrm{Nc}‘(\beta + \gamma) .$

$[*100\cdot3\cdot31] \quad \supset . \alpha \,\mathrm{sm}\, (\beta + \gamma) .$

$[*73\cdot1] \quad \supset . (\exists R) . R \epsilon 1 \to 1 . \mathrm{D}‘R = \alpha . \mathrm{G}‘R = \downarrow \Lambda_\gamma “\iota“\beta \cup \Lambda_\beta \downarrow “\iota“\gamma .$

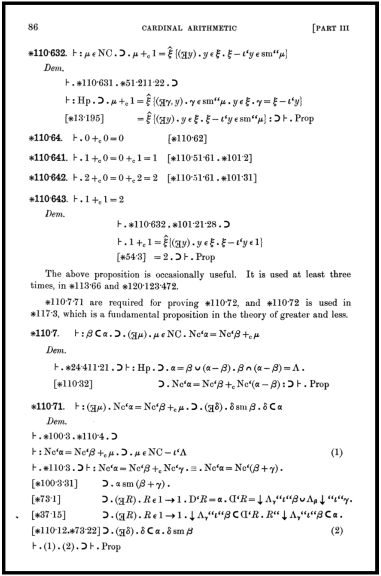
$[*37\cdot15] \quad \supset . (\exists R) . R \epsilon 1 \to 1 . \downarrow \Lambda_\gamma “\iota“\beta \subset \mathrm{G}‘R . R“\downarrow \Lambda_\gamma “\iota“\beta \subset \alpha .$

$[*110\cdot12 . *73\cdot22] \supset . (\exists\delta) . \delta \subset \alpha . \delta \,\mathrm{sm}\, \beta \quad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, *Principia mathematica*, 3 vols., Cambridge University Press, 1910, 1912, 1913

Extreme formalism



*110·632. $\vdash : \mu \in \mathrm{NC} . \supset . \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \in \xi . \xi - \iota' y \in \mathrm{sm}''\mu\}$

Dem.

$\vdash . *110{\cdot}631 . *51{\cdot}211{\cdot}22 . \supset$

$\vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists \gamma, y) . \gamma \in \mathrm{sm}''\mu . y \in \xi . \gamma = \xi - \iota' y\}$

[*13·195] $= \hat{\xi}\{(\exists y) . y \in \xi . \xi - \iota' y \in \mathrm{sm}''\mu\} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*110·64. $\vdash . 0 +_c 0 = 0$ [*110·62]

*110·641. $\vdash . 1 +_c 0 = 0 +_c 1 = 1$ [*110·51·61 . *101·2]

*110·642. $\vdash . 2 +_c 0 = 0 +_c 2 = 2$ [*110·51·61 . *101·31]

*110·643. $\vdash . 1 +_c 1 = 2$

Dem.

$\vdash . *110{\cdot}632 . *101{\cdot}21{\cdot}28 . \supset$

$\vdash . 1 +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \in \xi . \xi - \iota' y \in 1\}$

[*54·3] $= 2 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

The above proposition is occasionally useful. It is used at least three times, in *113·66 and *120·123·472.

*110·71 are required for proving *110·72, and *110·72 is used in *117·3, which is a fundamental proposition in the theory of greater and less.

*110·7. $\vdash : \beta \subset \alpha . \supset . (\exists \mu) . \mu \in \mathrm{NC} . \mathrm{Nc}'\alpha = \mathrm{Nc}'\beta +_c \mu$

Dem.

$\vdash . *24{\cdot}411{\cdot}21 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha = \beta \cup (\alpha - \beta) . \beta \cap (\alpha - \beta) = \Lambda .$

[*110·32] $\supset . \mathrm{Nc}'\alpha = \mathrm{Nc}'\beta +_c \mathrm{Nc}'(\alpha - \beta) : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*110·71. $\vdash : (\exists \mu) . \mathrm{Nc}'\alpha = \mathrm{Nc}'\beta +_c \mu . \supset . (\exists \delta) . \delta \,\mathrm{sm}\, \beta . \delta \subset \alpha$

Dem.

$\vdash . *100{\cdot}3 . *110{\cdot}4 . \supset$

$\vdash : \mathrm{Nc}'\alpha = \mathrm{Nc}'\beta +_c \mu . \supset . \mu \in \mathrm{NC} - \iota'\Lambda$ (1)

$\vdash . *110{\cdot}3 . \supset \vdash : \mathrm{Nc}'\alpha = \mathrm{Nc}'\beta +_c \mathrm{Nc}'\gamma . \equiv . \mathrm{Nc}'\alpha = \mathrm{Nc}'(\beta + \gamma) .$

[*100·3·31] $\supset . \alpha \,\mathrm{sm}\, (\beta + \gamma) .$

[*73·1] $\supset . (\exists R) . R \in 1 \to 1 . \mathrm{D}'R = \alpha . \text{Ɑ}'R = \downarrow \Lambda_\gamma{}''\iota''\beta \cup \Lambda_\beta \downarrow{}''\iota''\gamma .$

[*37·15] $\supset . (\exists R) . R \in 1 \to 1 . \downarrow \Lambda_\gamma{}''\iota''\beta \subset \text{Ɑ}'R . R''\downarrow \Lambda_\gamma{}''\iota''\beta \subset \alpha .$

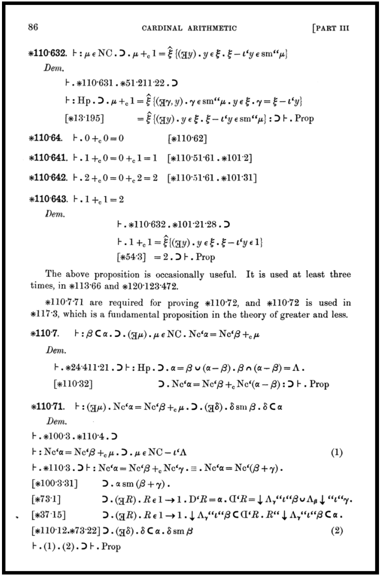
[*110·12.*73·22] $\supset . (\exists \delta) . \delta \subset \alpha . \delta \,\mathrm{sm}\, \beta$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, *Principia mathematica*, 3 vols., Cambridge University Press, 1910, 1912, 1913

Vol. II, p. 86: $1 + 1 = 2$

Extreme formalism



∗110·632. $\vdash : \mu \epsilon \mathrm{NC} \,.\supset.\, \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) \,.\, y \epsilon \xi \,.\, \xi - \iota\text{‘}y \,\epsilon\, \mathrm{sm}\text{“}\mu\}$

Dem.

$\vdash . ∗110·631 . ∗51·211·22 . \supset$

$\vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists \gamma, y) \,.\, \gamma \epsilon \mathrm{sm}\text{“}\mu \,.\, y \epsilon \xi \,.\, \gamma = \xi - \iota\text{‘}y\}$

[∗13·195] $\quad = \hat{\xi}\{(\exists y) \,.\, y \epsilon \xi \,.\, \xi - \iota\text{‘}y \,\epsilon\, \mathrm{sm}\text{“}\mu\} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

∗110·64. $\vdash . 0 +_c 0 = 0$ [∗110·62]

∗110·641. $\vdash . 1 +_c 0 = 0 +_c 1 = 1$ [∗110·51·61 . ∗101·2]

∗110·642. $\vdash . 2 +_c 0 = 0 +_c 2 = 2$ [∗110·51·61 . ∗101·31]

∗110·643. $\vdash . 1 +_c 1 = 2$

Dem.

$\vdash . ∗110·632 . ∗101·21·28 . \supset$

$\vdash . 1 +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) \,.\, y \epsilon \xi \,.\, \xi - \iota\text{‘}y \,\epsilon\, 1\}$

[∗54·3] $\quad = 2 \,.\supset \vdash . \mathrm{Prop}$

The above proposition is occasionally useful. It is used at least three times, in ∗113·66 and ∗120·123·472.

∗110·7·71 are required for proving ∗110·72, and ∗110·72 is used in ∗117·3, which is a fundamental proposition in the theory of greater and less.

∗110·7. $\vdash : \beta \subset \alpha \,.\supset.\, (\exists \mu) \,.\, \mu \epsilon \mathrm{NC} \,.\, \mathrm{Nc}\text{‘}\alpha = \mathrm{Nc}\text{‘}\beta +_c \mu$

Dem.

$\vdash . ∗24·411·21 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \alpha = \beta \cup (\alpha - \beta) \,.\, \beta \cap (\alpha - \beta) = \Lambda \,.$

[∗110·32] $\quad \supset . \mathrm{Nc}\text{‘}\alpha = \mathrm{Nc}\text{‘}\beta +_c \mathrm{Nc}\text{‘}(\alpha - \beta) : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

∗110·71. $\vdash : (\exists \mu) \,.\, \mathrm{Nc}\text{‘}\alpha = \mathrm{Nc}\text{‘}\beta +_c \mu \,.\supset.\, (\exists \delta) \,.\, \delta \,\mathrm{sm}\, \beta \,.\, \delta \subset \alpha$

Dem.

$\vdash . ∗100·3 . ∗110·4 . \supset$

$\vdash : \mathrm{Nc}\text{‘}\alpha = \mathrm{Nc}\text{‘}\beta +_c \mu \,.\supset.\, \mu \epsilon \mathrm{NC} - \iota\text{‘}\Lambda \quad (1)$

$\vdash . ∗110·3 . \supset \vdash : \mathrm{Nc}\text{‘}\alpha = \mathrm{Nc}\text{‘}\beta +_c \mathrm{Nc}\text{‘}\gamma \,.\equiv.\, \mathrm{Nc}\text{‘}\alpha = \mathrm{Nc}\text{‘}(\beta + \gamma) \,.$

[∗100·3·31] $\quad \supset . \alpha \,\mathrm{sm}\, (\beta + \gamma) \,.$

[∗73·1] $\quad \supset . (\exists R) \,.\, R \epsilon 1 \to 1 \,.\, \mathrm{D}\text{‘}R = \alpha \,.\, \text{ᗡ}\text{‘}R = \downarrow \Lambda_\gamma\text{“}\iota\text{“}\beta \cup \Lambda_\beta \downarrow \text{“}\iota\text{“}\gamma \,.$

[∗37·15] $\quad \supset . (\exists R) \,.\, R \epsilon 1 \to 1 \,.\, \downarrow \Lambda_\gamma\text{“}\iota\text{“}\beta \subset \text{ᗡ}\text{‘}R \,.\, R\text{“}\downarrow \Lambda_\gamma\text{“}\iota\text{“}\beta \subset \alpha \,.$

[∗110·12.∗73·22] $\supset . (\exists \delta) \,.\, \delta \subset \alpha \,.\, \delta \,\mathrm{sm}\, \beta \quad (2)$

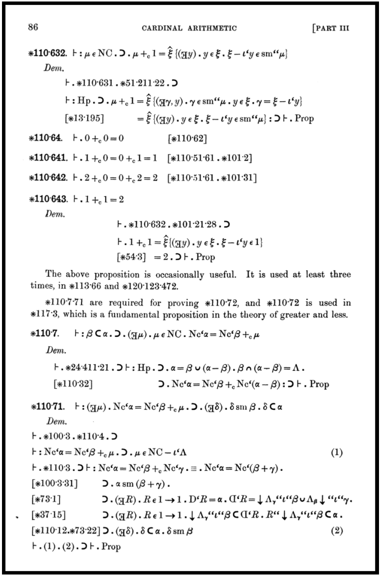
$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, *Principia mathematica*, 3 vols., Cambridge University Press, 1910, 1912, 1913

Vol. II, p. 86: $1 + 1 = 2$

"The above proposition is occasionally useful."

Extreme formalism


86 CARDINAL ARITHMETIC [PART III

∗110·632. $\vdash : \mu \epsilon \mathrm{NC} \,.\supset.\, \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) \,.\, y \epsilon \xi \,.\, \xi - \iota`y \epsilon \mathrm{sm}``\mu\}$

Dem.

$\vdash . *110{\cdot}631 . *51{\cdot}211{\cdot}22 . \supset$

$\vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists \gamma, y) \,.\, \gamma \epsilon \mathrm{sm}``\mu \,.\, y \epsilon \xi \,.\, \gamma = \xi - \iota`y\}$

$[*13{\cdot}195] \quad = \hat{\xi}\{(\exists y) \,.\, y \epsilon \xi \,.\, \xi - \iota`y \epsilon \mathrm{sm}``\mu\} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

∗110·64. $\vdash . 0 +_c 0 = 0$ $[*110{\cdot}62]$

∗110·641. $\vdash . 1 +_c 0 = 0 +_c 1 = 1$ $[*110{\cdot}51{\cdot}61 . *101{\cdot}2]$

∗110·642. $\vdash . 2 +_c 0 = 0 +_c 2 = 2$ $[*110{\cdot}51{\cdot}61 . *101{\cdot}31]$

∗110·643. $\vdash . 1 +_c 1 = 2$

Dem.

$\vdash . *110{\cdot}632 . *101{\cdot}21{\cdot}28 . \supset$

$\vdash . 1 +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) \,.\, y \epsilon \xi \,.\, \xi - \iota`y \epsilon 1\}$

$[*54{\cdot}3] \quad = 2 \,.\supset \vdash . \mathrm{Prop}$

The above proposition is occasionally useful. It is used at least three times, in ∗113·66 and ∗120·123·472.

∗110·7·71 are required for proving ∗110·72, and ∗110·72 is used in ∗117·3, which is a fundamental proposition in the theory of greater and less.

∗110·7. $\vdash : \beta \subset \alpha \,.\supset.\, (\exists \mu) \,.\, \mu \epsilon \mathrm{NC} \,.\, \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mu$

Dem.

$\vdash . *24{\cdot}411{\cdot}21 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \alpha = \beta \cup (\alpha - \beta) \,.\, \beta \cap (\alpha - \beta) = \Lambda \,.$

$[*110{\cdot}32] \quad \supset . \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mathrm{Nc}`(\alpha - \beta) : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

∗110·71. $\vdash : (\exists \mu) \,.\, \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mu \,.\supset.\, (\exists \delta) \,.\, \delta \,\mathrm{sm}\, \beta \,.\, \delta \subset \alpha$

Dem.

$\vdash . *100{\cdot}3 . *110{\cdot}4 . \supset$

$\vdash : \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mu \,.\supset.\, \mu \epsilon \mathrm{NC} - \iota`\Lambda$ (1)

$\vdash . *110{\cdot}3 . \supset \vdash : \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mathrm{Nc}`\gamma \,.\equiv.\, \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`(\beta + \gamma) \,.$

$[*100{\cdot}3{\cdot}31] \quad \supset . \alpha \,\mathrm{sm}\, (\beta + \gamma) \,.$

$[*73{\cdot}1] \quad \supset . (\exists R) \,.\, R \epsilon 1 \to 1 \,.\, \mathrm{D}`R = \alpha \,.\, \mathrm{G}`R = \downarrow \Lambda_\gamma``\iota``\beta \cup \Lambda_\beta \downarrow ``\iota``\gamma \,.$

$[*37{\cdot}15] \quad \supset . (\exists R) \,.\, R \epsilon 1 \to 1 \,.\, \downarrow \Lambda_\gamma``\iota``\beta \subset \mathrm{G}`R \,.\, R`` \downarrow \Lambda_\gamma``\iota``\beta \subset \alpha \,.$

$[*110{\cdot}12 . *73{\cdot}22] \supset . (\exists \delta) \,.\, \delta \subset \alpha \,.\, \delta \,\mathrm{sm}\, \beta$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, *Principia mathematica*, 3 vols., Cambridge University Press, 1910, 1912, 1913

Vol. II, p. 86: $1 + 1 = 2$

"The above proposition is occasionally useful."

NB. This is not the source of our axioms for the reals.