BO1 History of Mathematics
Lecture XIII
Complex analysis
Part 2: Functions of a complex variable

MT 2020 Week 7

Complex analysis

The origins of complex analysis may be seen in early achievements by Johann Bernoulli, Euler, and others, using complex transformations to evaluate real integrals.

Complex analysis

The origins of complex analysis may be seen in early achievements by Johann Bernoulli, Euler, and others, using complex transformations to evaluate real integrals. But is substitution of complex variables for real variables permissible?

Complex analysis

The origins of complex analysis may be seen in early achievements by Johann Bernoulli, Euler, and others, using complex transformations to evaluate real integrals. But is substitution of complex variables for real variables permissible?

- Euler (posthumous, 1794): yes

Complex analysis

The origins of complex analysis may be seen in early achievements by Johann Bernoulli, Euler, and others, using complex transformations to evaluate real integrals. But is substitution of complex variables for real variables permissible?

- Euler (posthumous, 1794): yes
- Laplace (1785, 1812): yes

Complex analysis

The origins of complex analysis may be seen in early achievements by Johann Bernoulli, Euler, and others, using complex transformations to evaluate real integrals. But is substitution of complex variables for real variables permissible?

- Euler (posthumous, 1794): yes
- Laplace (1785, 1812): yes
- Poisson (1812): doubtful

Complex analysis

The origins of complex analysis may be seen in early achievements by Johann Bernoulli, Euler, and others, using complex transformations to evaluate real integrals. But is substitution of complex variables for real variables permissible?

- Euler (posthumous, 1794): yes
- Laplace (1785, 1812): yes
- Poisson (1812): doubtful
- Cauchy (1814): inspired by Laplace, set to work on the problem

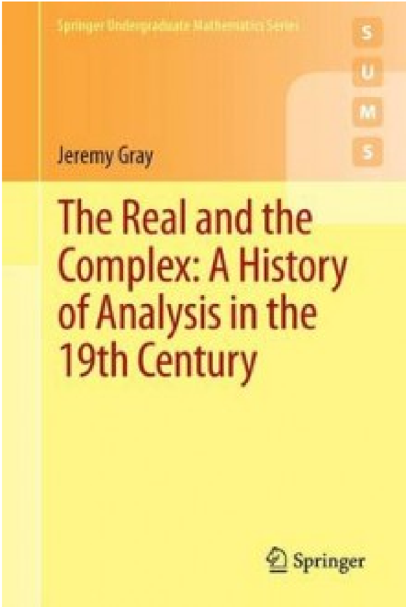
Sources for the origins of complex analysis

Secondary:

- Katz: §17.3 (3rd ed.); §22.3 (brief ed.)
- Frank Smithies: *Cauchy and the creation of complex function theory*, Cambridge University Press, 1997

Primary: as quoted by Smithies; some extracts reproduced in *Mathematics emerging*, §15.2.

Real and complex analysis united



Cauchy as 'creator' of complex analysis

Some of Cauchy's contributions to complex analysis:

Cauchy as 'creator' of complex analysis

Some of Cauchy's contributions to complex analysis:

- integration along paths and contours (1814) [1827]

Cauchy as 'creator' of complex analysis

Some of Cauchy's contributions to complex analysis:

- integration along paths and contours (1814) [1827]
- calculus of residues (1826)

Cauchy as ‘creator’ of complex analysis

Some of Cauchy’s contributions to complex analysis:

- integration along paths and contours (1814) [1827]
- calculus of residues (1826)
- integral formulae (1831)

Cauchy as ‘creator’ of complex analysis

Some of Cauchy’s contributions to complex analysis:

- integration along paths and contours (1814) [1827]
- calculus of residues (1826)
- integral formulae (1831)
- inferences about Taylor series expansions

Cauchy as 'creator' of complex analysis

Some of Cauchy's contributions to complex analysis:

- integration along paths and contours (1814) [1827]
- calculus of residues (1826)
- integral formulae (1831)
- inferences about Taylor series expansions
- applications to evaluation of difficult definite integrals of real functions

Cauchy's changing views of complex numbers and variables

At different times, Cauchy regarded complex numbers in different ways:

Cauchy's changing views of complex numbers and variables

At different times, Cauchy regarded complex numbers in different ways:

- as formal (numerical) expressions $a + b\sqrt{-1}$;

Cauchy's changing views of complex numbers and variables

At different times, Cauchy regarded complex numbers in different ways:

- as formal (numerical) expressions $a + b\sqrt{-1}$;
- geometrically;

Cauchy's changing views of complex numbers and variables

At different times, Cauchy regarded complex numbers in different ways:

- as formal (numerical) expressions $a + b\sqrt{-1}$;
- geometrically;
- by reducing $i = \sqrt{-1}$ to a "real but indeterminate quantity"

Cauchy's changing views of complex numbers and variables

At different times, Cauchy regarded complex numbers in different ways:

- as formal (numerical) expressions $a + b\sqrt{-1}$;
- geometrically;
- by reducing $i = \sqrt{-1}$ to a "real but indeterminate quantity"

  This done, there is no need to torture the mind to discover what the symbolic sign $\sqrt{-1}$ *could represent* ...

Cauchy's changing views of complex numbers and variables

At different times, Cauchy regarded complex numbers in different ways:

- as formal (numerical) expressions $a + b\sqrt{-1}$;
- geometrically;
- by reducing $i = \sqrt{-1}$ to a "real but indeterminate quantity"

  This done, there is no need to torture the mind to discover what the symbolic sign $\sqrt{-1}$ *could represent* ...

  (in modern terms, Cauchy reduced complex arithmetic to calculations modulo $i^2 + 1$ in $\mathbb{R}[i]$)

Cauchy's changing views of complex numbers and variables

At different times, Cauchy regarded complex numbers in different ways:

- as formal (numerical) expressions $a + b\sqrt{-1}$;
- geometrically;
- by reducing $i = \sqrt{-1}$ to a "real but indeterminate quantity"

  This done, there is no need to torture the mind to discover what the symbolic sign $\sqrt{-1}$ *could represent ...*

  (in modern terms, Cauchy reduced complex arithmetic to calculations modulo $i^2 + 1$ in $\mathbb{R}[i]$)

Moreover, Cauchy's view of complex variables gradually shifted

- from quantities with two parts $x + y\sqrt{-1}$

Cauchy's changing views of complex numbers and variables

At different times, Cauchy regarded complex numbers in different ways:

- as formal (numerical) expressions $a + b\sqrt{-1}$;
- geometrically;
- by reducing $i = \sqrt{-1}$ to a "real but indeterminate quantity"

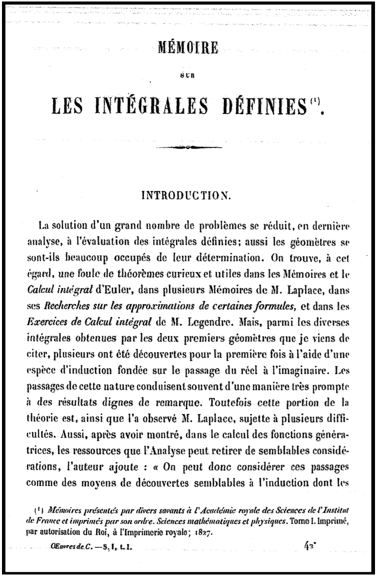
  This done, there is no need to torture the mind to discover what the symbolic sign $\sqrt{-1}$ could represent ...

  (in modern terms, Cauchy reduced complex arithmetic to calculations modulo $i^2 + 1$ in $\mathbb{R}[i]$)

Moreover, Cauchy's view of complex variables gradually shifted

- from quantities with two parts $x + y\sqrt{-1}$
- to single quantities z.

Cauchy's first 'Mémoire' (1814/1827)



MÉMOIRE

SUR

LES INTÉGRALES DÉFINIES [1].

INTRODUCTION.

La solution d'un grand nombre de problèmes se réduit, en dernière analyse, à l'évaluation des intégrales définies; aussi les géomètres se sont-ils beaucoup occupés de leur détermination. On trouve, à cet égard, une foule de théorèmes curieux et utiles dans les Mémoires et le *Calcul intégral* d'Euler, dans plusieurs Mémoires de M. Laplace, dans ses *Recherches sur les approximations de certaines formules*, et dans les *Exercices de Calcul intégral* de M. Legendre. Mais, parmi les diverses intégrales obtenues par les deux premiers géomètres que je viens de citer, plusieurs ont été découvertes pour la première fois à l'aide d'une espèce d'induction fondée sur le passage du réel à l'imaginaire. Les passages de cette nature conduisent souvent d'une manière très prompte à des résultats dignes de remarque. Toutefois cette portion de la théorie est, ainsi que l'a observé M. Laplace, sujette à plusieurs difficultés. Aussi, après avoir montré, dans le calcul des fonctions génératrices, les ressources que l'Analyse peut retirer de semblables considérations, l'auteur ajoute : « On peut donc considérer ces passages comme des moyens de découvertes semblables à l'induction dont les

[1] *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques.* Tome I. Imprimé, par autorisation du Roi, à l'Imprimerie royale; 1827.

Cited Laplace's concerns about the solution of integrals by "the passage from the real to the imaginary"

Cauchy's first 'Mémoire' (1814/1827)

MÉMOIRE

SUR

LES INTÉGRALES DÉFINIES (1).

INTRODUCTION.

La solution d'un grand nombre de problèmes se réduit, en dernière analyse, à l'évaluation des intégrales définies; aussi les géomètres se sont-ils beaucoup occupés de leur détermination. On trouve, à cet égard, une foule de théorèmes curieux et utiles dans les Mémoires et le *Calcul intégral* d'Euler, dans plusieurs Mémoires de M. Laplace, dans ses *Recherches sur les approximations de certaines formules*, et dans les *Exercices de Calcul intégral* de M. Legendre. Mais, parmi les diverses intégrales obtenues par les deux premiers géomètres que je viens de citer, plusieurs ont été découvertes pour la première fois à l'aide d'une espèce d'induction fondée sur le passage du réel à l'imaginaire. Les passages de cette nature conduisent souvent d'une manière très prompte à des résultats dignes de remarque. Toutefois cette portion de la théorie est, ainsi que l'a observé M. Laplace, sujette à plusieurs difficultés. Aussi, après avoir montré, dans le calcul des fonctions génératrices, les ressources que l'Analyse peut retirer de semblables considérations, l'auteur ajoute : « On peut donc considérer ces passages comme des moyens de découvertes semblables à l'induction dont les

(1) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques.* Tome I. Imprimé, par autorisation du Roi, à l'Imprimerie royale; 1827.

Œuvres de C. — S. I, t. I. 42*

Cited Laplace's concerns about the solution of integrals by "the passage from the real to the imaginary"

First part: evaluation of improper integrals, such as

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

Cauchy's first 'Mémoire' (1814/1827)

MÉMOIRE

SUR

LES INTÉGRALES DÉFINIES [1].

INTRODUCTION.

La solution d'un grand nombre de problèmes se réduit, en dernière analyse, à l'évaluation des intégrales définies; aussi les géomètres se sont-ils beaucoup occupés de leur détermination. On trouve, à cet égard, une foule de théorèmes curieux et utiles dans les Mémoires et le *Calcul intégral* d'Euler, dans plusieurs Mémoires de M. Laplace, dans ses *Recherches sur les approximations de certaines formules*, et dans les *Exercices de Calcul intégral* de M. Legendre. Mais, parmi les diverses intégrales obtenues par les deux premiers géomètres que je viens de citer, plusieurs ont été découvertes pour la première fois à l'aide d'une espèce d'induction fondée sur le passage du réel à l'imaginaire. Les passages de cette nature conduisent souvent d'une manière très prompte à des résultats dignes de remarque. Toutefois cette portion de la théorie est, ainsi que l'a observé M. Laplace, sujette à plusieurs difficultés. Aussi, après avoir montré, dans le calcul des fonctions génératrices, les ressources que l'Analyse peut retirer de semblables considérations, l'auteur ajoute : « On peut donc considérer ces passages comme des moyens de découvertes semblables à l'induction dont les

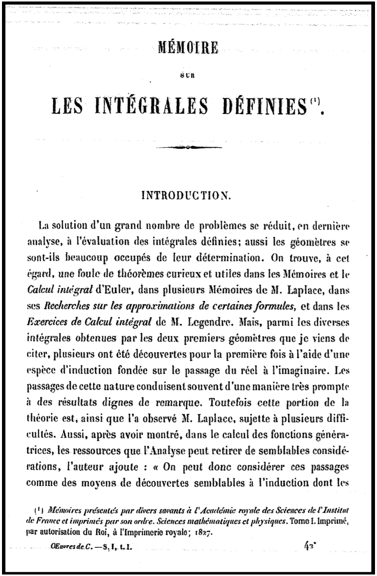
[1] *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques.* Tome I. Imprimé, par autorisation du Roi, à l'Imprimerie royale; 1827.

Cited Laplace's concerns about the solution of integrals by "the passage from the real to the imaginary"

First part: evaluation of improper integrals, such as

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}$$

Cauchy's first 'Mémoire' (1814/1827)



MÉMOIRE

SUR

LES INTÉGRALES DÉFINIES [1].

INTRODUCTION.

La solution d'un grand nombre de problèmes se réduit, en dernière analyse, à l'évaluation des intégrales définies; aussi les géomètres se sont-ils beaucoup occupés de leur détermination. On trouve, à cet égard, une foule de théorèmes curieux et utiles dans les Mémoires et le *Calcul intégral* d'Euler, dans plusieurs Mémoires de M. Laplace, dans ses *Recherches sur les approximations de certaines formules*, et dans les *Exercices de Calcul intégral* de M. Legendre. Mais, parmi les diverses intégrales obtenues par les deux premiers géomètres que je viens de citer, plusieurs ont été découvertes pour la première fois à l'aide d'une espèce d'induction fondée sur le passage du réel à l'imaginaire. Les passages de cette nature conduisent souvent d'une manière très prompte à des résultats dignes de remarque. Toutefois cette portion de la théorie est, ainsi que l'a observé M. Laplace, sujette à plusieurs difficultés. Aussi, après avoir montré, dans le calcul des fonctions génératrices, les ressources que l'Analyse peut retirer de semblables considérations, l'auteur ajoute : « On peut donc considérer ces passages comme des moyens de découvertes semblables à l'induction dont les

[1] *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques.* Tome I. Imprimé, par autorisation du Roi, à l'Imprimerie royale; 1827.

Œuvres de C. — S. I, t. I. 42*

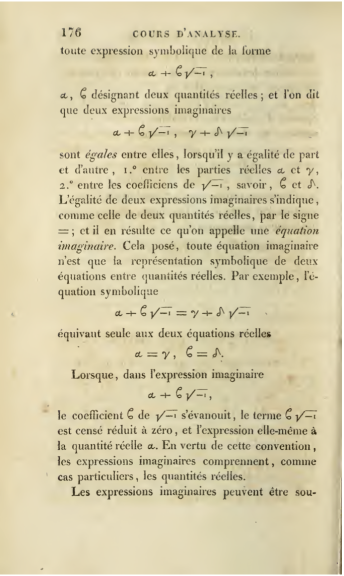
Cited Laplace's concerns about the solution of integrals by "the passage from the real to the imaginary"

First part: evaluation of improper integrals, such as

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

Noted Cauchy–Riemann equations in passing (as had d'Alembert and Euler) as general useful property of analytic functions, rather than fundamental feature of the theory

Complex numbers in the *Cours d'analyse* (1821)



toute expression symbolique de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

α, β désignant deux quantités réelles ; et l'on dit que deux expressions imaginaires

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

sont *égales* entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre, 1.° entre les parties réelles α et γ, 2.° entre les coefficiens de $\sqrt{-1}$, savoir, β et δ. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique, comme celle de deux quantités réelles, par le signe $=$; et il en résulte ce qu'on appelle une *équation imaginaire*. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

équivaut seule aux deux équations réelles

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta.$$

Lorsque, dans l'expression imaginaire

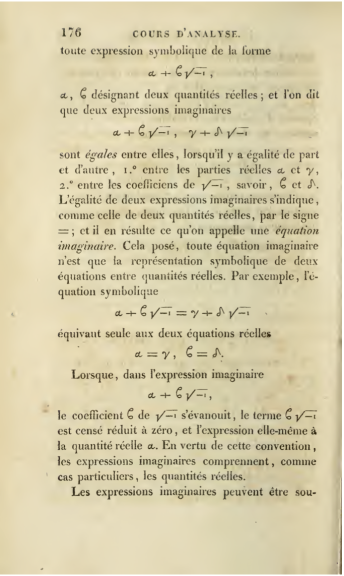
$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

le coefficient β de $\sqrt{-1}$ s'évanouit, le terme $\beta\sqrt{-1}$ est censé réduit à zéro, et l'expression elle-même à la quantité réelle α. En vertu de cette convention, les expressions imaginaires comprennent, comme cas particuliers, les quantités réelles.

Les expressions imaginaires peuvent être sou-

Defined as "symbolic expressions" $a + b\sqrt{-1}$

Complex numbers in the *Cours d'analyse* (1821)



toute expression symbolique de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}\,,$$

α, β désignant deux quantités réelles ; et l'on dit que deux expressions imaginaires

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}\,,\quad \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

sont *égales* entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre, 1.° entre les parties réelles α et γ, 2.° entre les coefficiens de $\sqrt{-1}$, savoir, β et δ. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique, comme celle de deux quantités réelles, par le signe $=$; et il en résulte ce qu'on appelle une *équation imaginaire*. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

équivaut seule aux deux équations réelles

$$\alpha = \gamma\,,\quad \beta = \delta.$$

Lorsque, dans l'expression imaginaire

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}\,,$$

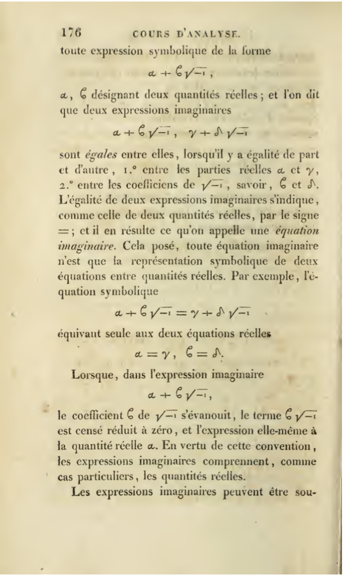
le coefficient β de $\sqrt{-1}$ s'évanouit, le terme $\beta\sqrt{-1}$ est censé réduit à zéro, et l'expression elle-même à la quantité réelle α. En vertu de cette convention, les expressions imaginaires comprennent, comme cas particuliers, les quantités réelles.

Les expressions imaginaires peuvent être sou-

Defined as "symbolic expressions" $a + b\sqrt{-1}$

55-page development of formal definitions and properties

Complex numbers in the *Cours d'analyse* (1821)



176 COURS D'ANALYSE.

toute expression symbolique de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

α, β désignant deux quantités réelles ; et l'on dit que deux expressions imaginaires

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

sont *égales* entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre, 1.° entre les parties réelles α et γ, 2.° entre les coefficiens de $\sqrt{-1}$, savoir, β et δ. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique, comme celle de deux quantités réelles, par le signe $=$; et il en résulte ce qu'on appelle une *équation imaginaire*. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

équivaut seule aux deux équations réelles

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta.$$

Lorsque, dans l'expression imaginaire

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

le coefficient β de $\sqrt{-1}$ s'évanouit, le terme $\beta\sqrt{-1}$ est censé réduit à zéro, et l'expression elle-même à la quantité réelle α. En vertu de cette convention, les expressions imaginaires comprennent, comme cas particuliers, les quantités réelles.

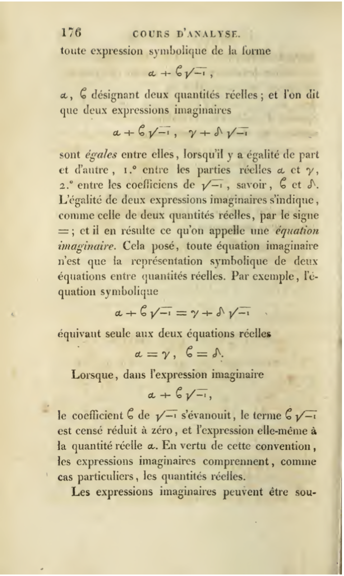
Les expressions imaginaires peuvent être sou-

Defined as "symbolic expressions" $a + b\sqrt{-1}$

55-page development of formal definitions and properties

Consideration of multi-functions — which are the most natural branches to take?

Complex numbers in the *Cours d'analyse* (1821)



176 COURS D'ANALYSE.

toute expression symbolique de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

α, β désignant deux quantités réelles; et l'on dit que deux expressions imaginaires

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

sont *égales* entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre, 1.° entre les parties réelles α et γ, 2.° entre les coefficiens de $\sqrt{-1}$, savoir, β et δ. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique, comme celle de deux quantités réelles, par le signe $=$; et il en résulte ce qu'on appelle une *équation imaginaire*. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

équivaut seule aux deux équations réelles

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta.$$

Lorsque, dans l'expression imaginaire

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

le coefficient β de $\sqrt{-1}$ s'évanouit, le terme $\beta\sqrt{-1}$ est censé réduit à zéro, et l'expression elle-même à la quantité réelle α. En vertu de cette convention, les expressions imaginaires comprennent, comme cas particuliers, les quantités réelles.

Les expressions imaginaires peuvent être sou-

Defined as "symbolic expressions" $a + b\sqrt{-1}$

55-page development of formal definitions and properties

Consideration of multi-functions — which are the most natural branches to take?

Sought to extend ideas for real functions to the complex case, particularly those relating to power series and convergence

Cauchy's second 'Mémoire' (1825)

'Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires'

Direct adaptation of definition of real integral to the complex case:

Cauchy's second 'Mémoire' (1825)

'Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires'

Direct adaptation of definition of real integral to the complex case:

$$\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$$

is the limit (or one of the limits) of a sum of products of the form

$$\sum (x_i - x_{i-1} + y_i - y_{i-1}\sqrt{-1}) f(x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1}).$$

Cauchy's second 'Mémoire' (1825)

'Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires'

Direct adaptation of definition of real integral to the complex case:

$$\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$$

is the limit (or one of the limits) of a sum of products of the form

$$\sum(x_{i-1}+y_{i-1}\sqrt{-1})f(x_{i-1}+y_{i-1}\sqrt{-1}).$$

NB. No explicit definition of a function of a complex variable;

Cauchy's second 'Mémoire' (1825)

'Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires'

Direct adaptation of definition of real integral to the complex case:

$$\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$$

is the limit (or one of the limits) of a sum of products of the form

$$\sum (x_{i-1}+y_{i-1}\sqrt{-1})f(x_{i-1}+y_{i-1}\sqrt{-1}).$$

NB. No explicit definition of a function of a complex variable; tacit assumption of differentiability, hence that the Cauchy–Riemann equations hold.

Contour integration

In any domain where the function does not become infinite, the value of a complex integral is independent of the path along which it is taken.

Contour integration

In any domain where the function does not become infinite, the value of a complex integral is independent of the path along which it is taken.

Cauchy: consider two different paths within the rectangle (x_0, y_0), (X, Y) such that the function $f(x + y\sqrt{-1})$ does not become infinite for values of x, y lying within the domain enclosed by the paths.

Contour integration

In any domain where the function does not become infinite, the value of a complex integral is independent of the path along which it is taken.

Cauchy: consider two different paths within the rectangle (x_0, y_0), (X, Y) such that the function $f(x + y\sqrt{-1})$ does not become infinite for values of x, y lying within the domain enclosed by the paths. Then the value of the integral $\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$ is independent of the path taken.

Contour integration

In any domain where the function does not become infinite, the value of a complex integral is independent of the path along which it is taken.

Cauchy: consider two different paths within the rectangle (x_0, y_0), (X, Y) such that the function $f(x + y\sqrt{-1})$ does not become infinite for values of x, y lying within the domain enclosed by the paths. Then the value of the integral $\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$ is independent of the path taken.

Really a theorem about real functions in the plane?

Contour integration

In any domain where the function does not become infinite, the value of a complex integral is independent of the path along which it is taken.

Cauchy: consider two different paths within the rectangle (x_0, y_0), (X, Y) such that the function $f(x + y\sqrt{-1})$ does not become infinite for values of x, y lying within the domain enclosed by the paths. Then the value of the integral $\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$ is independent of the path taken.

Really a theorem about real functions in the plane?

(Gauss had discovered this in 1811, alongside a similar definition of a complex integral, but did not publish.)

Contour integration

For the case where $f(x + y\sqrt{-1})$ becomes infinite at the point $x = a, y = b$, Cauchy considered the limit

$$\mathrm{f} := \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \left(x - a + (y - b)\sqrt{-1} \right) f \left(x + y\sqrt{-1} \right),$$

Contour integration

For the case where $f(x+y\sqrt{-1})$ becomes infinite at the point $x=a, y=b$, Cauchy considered the limit

$$\mathrm{f} := \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \left(x-a+(y-b)\sqrt{-1}\right) f\left(x+y\sqrt{-1}\right),$$

and determined that the difference between the integrals of f along different paths that are infinitely close to each other as well as to (a,b) is $2\pi\mathrm{f}\sqrt{-1}$.

Contour integration

For the case where $f(x + y\sqrt{-1})$ becomes infinite at the point $x = a, y = b$, Cauchy considered the limit

$$\mathrm{f} := \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \left(x - a + (y - b)\sqrt{-1}\right) f\left(x + y\sqrt{-1}\right),$$

and determined that the difference between the integrals of f along different paths that are infinitely close to each other as well as to (a, b) is $2\pi\mathrm{f}\sqrt{-1}$.

With a natural extension of this result for multiple and/or higher-order singularities, this became an ancestor of Cauchy's residue theorem — developed as part of Cauchy's calculus of residues in a paper of 1826 ('Sur un nouveau genre de calcul').

Taylor's Theorem for complex analytic functions

In *Cours d'analyse* (1821), Cauchy had considered the notion of radius of convergence for both real and imaginary power series.

Taylor's Theorem for complex analytic functions

In *Cours d'analyse* (1821), Cauchy had considered the notion of radius of convergence for both real and imaginary power series.

1831: a complex function has a convergent power series if it is "finite and continuous"

Taylor's Theorem for complex analytic functions

In *Cours d'analyse* (1821), Cauchy had considered the notion of radius of convergence for both real and imaginary power series.

1831: a complex function has a convergent power series if it is "finite and continuous"

Continued to refine the conditions for the theorem over many years.

Taylor's Theorem for complex analytic functions

In *Cours d'analyse* (1821), Cauchy had considered the notion of radius of convergence for both real and imaginary power series.

1831: a complex function has a convergent power series if it is "finite and continuous"

Continued to refine the conditions for the theorem over many years.

Cauchy's language is not always satisfactory to modern eyes, but was considerably more rigorous than that of most of his contemporaries.

Taylor's Theorem for complex analytic functions

In *Cours d'analyse* (1821), Cauchy had considered the notion of radius of convergence for both real and imaginary power series.

1831: a complex function has a convergent power series if it is "finite and continuous"

Continued to refine the conditions for the theorem over many years.

Cauchy's language is not always satisfactory to modern eyes, but was considerably more rigorous than that of most of his contemporaries.

1841: extension to negative powers — Laurent's Theorem.

Cauchy’s complex analysis

Cauchy’s ideas concerning complex functions developed over many years.

Cauchy's complex analysis

Cauchy's ideas concerning complex functions developed over many years. In the early stages

- did he appreciate the fundamental nature of the concepts and results that he was using and deriving?

Cauchy's complex analysis

Cauchy's ideas concerning complex functions developed over many years. In the early stages

- did he appreciate the fundamental nature of the concepts and results that he was using and deriving?
- did he recognise the subtleties of working with complex numbers rather than simply with pairs of real numbers?

Cauchy's complex analysis

Cauchy's ideas concerning complex functions developed over many years. In the early stages

- did he appreciate the fundamental nature of the concepts and results that he was using and deriving?
- did he recognise the subtleties of working with complex numbers rather than simply with pairs of real numbers?

Have historians of mathematics read too much into the earlier work on the basis of what came later?

Cauchy's complex analysis

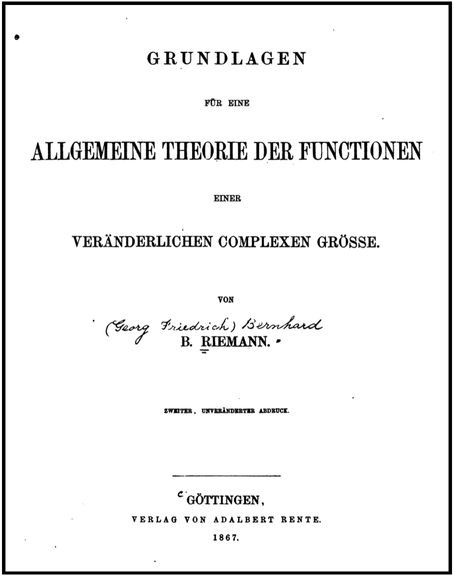
Cauchy's ideas concerning complex functions developed over many years. In the early stages

- did he appreciate the fundamental nature of the concepts and results that he was using and deriving?
- did he recognise the subtleties of working with complex numbers rather than simply with pairs of real numbers?

Have historians of mathematics read too much into the earlier work on the basis of what came later?

Point to note: Cauchy may be credited with many of the fundamental ideas of complex analysis, but this does not mean that they appeared fully-formed.

Riemann on complex analysis


GRUNDLAGEN

FÜR EINE

ALLGEMEINE THEORIE DER FUNCTIONEN

EINER

VERÄNDERLICHEN COMPLEXEN GRÖSSE.

VON

(Georg Friedrich) Bernhard
B. RIEMANN.

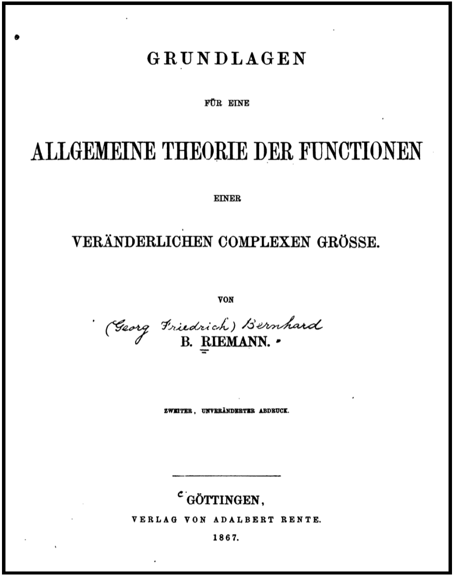
ZWEITER, UNVERÄNDERTER ABDRUCK.

GÖTTINGEN,
VERLAG VON ADALBERT RENTE.
1867.

Doctoral dissertation:
Foundations for a General Theory of Functions of a Variable Complex Quantity (1851)

Started from the idea that a complex variable should be treated as a single quantity z

Riemann on complex analysis


GRUNDLAGEN

FÜR EINE

ALLGEMEINE THEORIE DER FUNCTIONEN

EINER

VERÄNDERLICHEN COMPLEXEN GRÖSSE.

VON

(Georg Friedrich) Bernhard
B. RIEMANN.

ZWEITER, UNVERÄNDERTER ABDRUCK.

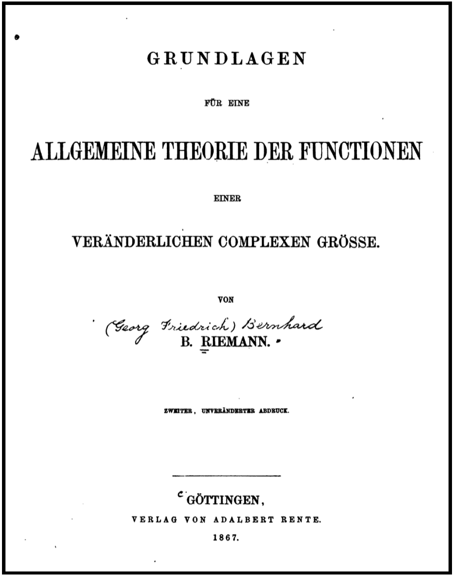
GÖTTINGEN,
VERLAG VON ADALBERT RENTE.
1867.

Doctoral dissertation: *Foundations for a General Theory of Functions of a Variable Complex Quantity* (1851)

Started from the idea that a complex variable should be treated as a single quantity z

"The complex variable w is called a function of another complex variable z when its variation is such that the value of the derivative $\frac{dw}{dz}$ is independent of the value of dz"

Riemann on complex analysis


GRUNDLAGEN

FÜR EINE

ALLGEMEINE THEORIE DER FUNCTIONEN

EINER

VERÄNDERLICHEN COMPLEXEN GRÖSSE.

VON

(Georg Friedrich) Bernhard
B. RIEMANN.

ZWEITER, UNVERÄNDERTER ABDRUCK.

GÖTTINGEN,
VERLAG VON ADALBERT RENTE.
1867.

Doctoral dissertation: *Foundations for a General Theory of Functions of a Variable Complex Quantity* (1851)

Started from the idea that a complex variable should be treated as a single quantity z

"The complex variable w is called a function of another complex variable z when its variation is such that the value of the derivative $\frac{dw}{dz}$ is independent of the value of dz"

That is: $\lim_{\delta \to 0} \frac{f(z+\delta)-f(z)}{\delta}$ exists

Riemann on complex analysis

— 4 —

so erhellt, dass er und zwar nur dann für je zwei Werthe von dx und dy denselben Werth haben wird, wenn

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$$

ist. Diese Bedingungen sind also hinreichend und nothwendig, damit $w = u + vi$ eine Function von $z = x + yi$ sei. Für die einzelnen Glieder dieser Function fliessen aus ihnen die folgenden:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0,$$

welche für die Untersuchung der Eigenschaften, die Einem Gliede einer solchen Function einzeln betrachtet zukommen, die Grundlage bilden. Wir werden den Beweis für die wichtigsten dieser Eigenschaften einer eingehenderen Betrachtung der vollständigen Function voraufgehen lassen, zuvor aber noch einige Punkte, welche allgemeineren Gebieten angehören, erörtern und festlegen, um uns den Boden für jene Untersuchungen zu ebenen.

* * *

5.

Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Grössen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von aufeinander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke; setzen jedoch für einen solchen Fall voraus, dass die auf einander liegenden Flächentheile nicht längs einer Linie zusammenhängen, so dass eine Umfaltung der Fläche, oder eine Spaltung in auf einander liegende Theile nicht vorkommt.

Die Anzahl der in jedem Theile der Ebene auf einander liegenden Flächentheile ist alsdann vollkommen bestimmt, wenn die Begrenzung der Lage und dem Sinne nach (d. h. ihre innere und äussere Seite) gegeben ist; ihr Verlauf kann sich jedoch noch verschieden gestalten.

In der That, ziehen wir durch den von der Fläche bedeckten Theil der Ebene eine beliebige Linie l, so ändert sich die Anzahl der über einander liegenden Flächentheile nur beim Ueberschreiten der Begrenzung, und zwar beim Uebertritt von Aussen nach Innen um $+1$, im entgegengesetzten Falle um -1, und ist also überall bestimmt. Längs des Ufers dieser Linie setzt sich nun jeder angrenzende Flächentheil auf ganz bestimmte Art fort, so lange die Linie die Begrenzung nicht trifft, da eine Unbestimmtheit jedenfalls nur in einem einzelnen Punkte und also entweder in einem Punkte der Linie selbst oder in einer endlichen Entfernung von derselben Statt hat; wir können daher, wenn wir unsere Betrachtung auf einen im Innern der Fläche verlaufenden Theil der Linie l und zu beiden Seiten auf einen hinreichend kleinen Flächenstreifen beschränken, von bestimmten angrenzenden Flächentheilen reden, deren Anzahl auf jeder Seite gleich ist, und die wir, indem wir der Linie eine bestimmte Richtung beilegen, auf der Linken mit $a_1, a_2, \ldots a_n$, auf der Rechten mit $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$, bezeichnen. Jeder Flächentheil a wird sich dann in einen der Flächentheile a' fortsetzen; dieser wird zwar im Allgemeinen für den ganzen Lauf der Linie l derselbe sein, kann sich jedoch für besondere Lagen von l in einem ihrer Punkte ändern. Nehmen wir an, dass oberhalb eines solchen Punktes σ (d. h.

Cauchy–Riemann equations now taken as fundamental to the theory

Riemann on complex analysis

— 4 —

so erhellt, dass er und zwar nur dann für je zwei Werthe von dx und dy denselben Werth haben wird, wenn

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$$

ist. Diese Bedingungen sind also hinreichend und nothwendig, damit $w = u + vi$ eine Function von $z = x + yi$ sei. Für die einzelnen Glieder dieser Function fliessen aus ihnen die folgenden:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

welche für die Untersuchung der Eigenschaften, die Einem Gliede einer solchen Function einzeln betrachtet zukommen, die Grundlage bilden. Wir werden den Beweis für die wichtigsten dieser Eigenschaften einer eingehenderen Betrachtung der vollständigen Function voraufgehen lassen, zuvor aber noch einige Punkte, welche allgemeineren Gebieten angehören, erörtern und festlegen, um uns den Boden für jene Untersuchungen zu ebenen.

* * *

5.

Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Grössen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von aufeinander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke; setzen jedoch für einen solchen Fall voraus, dass die auf einander liegenden Flächentheile nicht längs einer Linie zusammenhängen, so dass eine Umfaltung der Fläche, oder eine Spaltung in auf einander liegende Theile nicht vorkommt.

Die Anzahl der in jedem Theile der Ebene auf einander liegenden Flächentheile ist alsdann vollkommen bestimmt, wenn die Begrenzung der Lage und dem Sinne nach (d. h. ihre innere und äussere Seite) gegeben ist; ihr Verlauf kann sich jedoch noch verschieden gestalten.

In der That, ziehen wir durch den von der Fläche bedeckten Theil der Ebene eine beliebige Linie l, so ändert sich die Anzahl der über einander liegenden Flächentheile nur beim Ueberschreiten der Begrenzung, und zwar beim Uebertritt von Aussen nach Innen um $+1$, im entgegengesetzten Falle um -1, und ist also überall bestimmt. Längs des Ufers dieser Linie setzt sich nun jeder angrenzende Flächentheil auf ganz bestimmte Art fort, so lange die Linie die Begrenzung nicht trifft, da eine Unbestimmtheit jedenfalls nur in einem einzelnen Punkte und also entweder in einem Punkte der Linie selbst oder in einer endlichen Entfernung von derselben Statt hat; wir können daher, wenn wir unsere Betrachtung auf einen im Innern der Fläche verlaufenden Theil der Linie l und zu beiden Seiten auf einen hinreichend kleinen Flächenstreifen beschränken, von bestimmten angrenzenden Flächentheilen reden, deren Anzahl auf jeder Seite gleich ist, und die wir, indem wir der Linie eine bestimmte Richtung beilegen, auf der Linken mit $a_1, a_2, \dots a_n$, auf der Rechten mit $a'_1, a'_2, \dots a'_n$, bezeichnen. Jeder Flächentheil a wird sich dann in einen der Flächentheile a' fortsetzen; dieser wird zwar im Allgemeinen für den ganzen Lauf der Linie l derselbe sein, kann sich jedoch für besondere Lagen von l in einem ihrer Punkte ändern. Nehmen wir an, dass oberhalb eines solchen Punktes σ (d. h.

Cauchy–Riemann equations now taken as fundamental to the theory

Other key concepts appear explicitly:

- harmonic functions;

Riemann on complex analysis

— 4 —

so erhellt, dass er und zwar nur dann für je zwei Werthe von dx und dy denselben Werth haben wird, wenn

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \text{ und } \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$$

ist. Diese Bedingungen sind also hinreichend und nothwendig, damit $w = u + vi$ eine Function von $z = x + yi$ sei. Für die einzelnen Glieder dieser Function fliessen aus ihnen die folgenden:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

welche für die Untersuchung der Eigenschaften, die Einem Gliede einer solchen Function einzeln betrachtet zukommen, die Grundlage bilden. Wir werden den Beweis für die wichtigsten dieser Eigenschaften einer eingehenderen Betrachtung der vollständigen Function voraufgehen lassen, zuvor aber noch einige Punkte, welche allgemeineren Gebieten angehören, erörtern und festlegen, um uns den Boden für jene Untersuchungen zu ebenen.

* * *

5.

Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Grössen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von aufeinander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke; setzen jedoch für einen solchen Fall voraus, dass die auf einander liegenden Flächentheile nicht längs einer Linie zusammenhängen, so dass eine Umfaltung der Fläche, oder eine Spaltung in auf einander liegende Theile nicht vorkommt.

Die Anzahl der in jedem Theile der Ebene auf einander liegenden Flächentheile ist alsdann vollkommen bestimmt, wenn die Begrenzung der Lage und dem Sinne nach (d. h. ihre innere und äussere Seite) gegeben ist; ihr Verlauf kann sich jedoch noch verschieden gestalten.

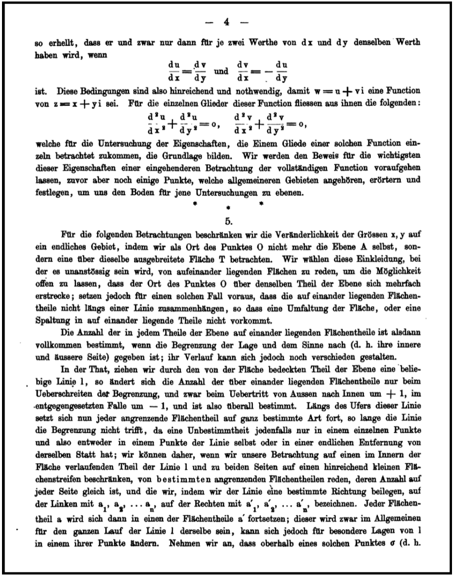
In der That, ziehen wir durch den von der Fläche bedeckten Theil der Ebene eine beliebige Linie l, so ändert sich die Anzahl der über einander liegenden Flächentheile nur beim Ueberschreiten der Begrenzung, und zwar beim Uebertritt von Aussen nach Innen um $+1$, im entgegengesetzten Falle um -1, und ist also überall bestimmt. Längs des Ufers dieser Linie setzt sich nun jeder angrenzende Flächentheil auf ganz bestimmte Art fort, so lange die Linie die Begrenzung nicht trifft, da eine Unbestimmtheit jedenfalls nur in einem einzelnen Punkte und also entweder in einem Punkte der Linie selbst oder in einer endlichen Entfernung von derselben Statt hat; wir können daher, wenn wir unsere Betrachtung auf einen im Innern der Fläche verlaufenden Theil der Linie l und zu beiden Seiten auf einen hinreichend kleinen Flächenstreifen beschränken, von bestimmten angrenzenden Flächentheilen reden, deren Anzahl auf jeder Seite gleich ist, und die wir, indem wir der Linie eine bestimmte Richtung beilegen, auf der Linken mit $a_1, a_2, \ldots a_n$, auf der Rechten mit $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$, bezeichnen. Jeder Flächentheil a wird sich dann in einen der Flächentheile a' fortsetzen; dieser wird zwar im Allgemeinen für den ganzen Lauf der Linie l derselbe sein, kann sich jedoch für besondere Lagen von l in einem ihrer Punkte ändern. Nehmen wir an, dass oberhalb eines solchen Punktes σ (d. h.

Cauchy–Riemann equations now taken as fundamental to the theory

Other key concepts appear explicitly:

- harmonic functions;
- conformality (a complex function preserves angles wherever its derivative does not vanish);

Riemann on complex analysis



— 4 —

so erhellt, dass er und zwar nur dann für je zwei Werthe von dx und dy denselben Werth haben wird, wenn

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$$

ist. Diese Bedingungen sind also hinreichend und nothwendig, damit $w = u + vi$ eine Function von $z = x + yi$ sei. Für die einzelnen Glieder dieser Function fliessen aus ihnen die folgenden:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

welche für die Untersuchung der Eigenschaften, die Einem Gliede einer solchen Function einzeln betrachtet zukommen, die Grundlage bilden. Wir werden den Beweis für die wichtigsten dieser Eigenschaften einer eingehenderen Betrachtung der vollständigen Function voraufgehen lassen, zuvor aber noch einige Punkte, welche allgemeineren Gebieten angehören, erörtern und festlegen, um uns den Boden für jene Untersuchungen zu ebenen.

* * *

5.

Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Grössen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von aufeinander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke; setzen jedoch für einen solchen Fall voraus, dass die auf einander liegenden Flächentheile nicht längs einer Linie zusammenhängen, so dass eine Umfaltung der Fläche, oder eine Spaltung in auf einander liegende Theile nicht vorkommt.

Die Anzahl der in jedem Theile der Ebene auf einander liegenden Flächentheile ist alsdann vollkommen bestimmt, wenn die Begrenzung der Lage und dem Sinne nach (d. h. ihre innere und äussere Seite) gegeben ist; ihr Verlauf kann sich jedoch noch verschieden gestalten.

In der That, ziehen wir durch den von der Fläche bedeckten Theil der Ebene eine beliebige Linie l, so ändert sich die Anzahl der über einander liegenden Flächentheile nur beim Ueberschreiten der Begrenzung, und zwar beim Uebertritt von Aussen nach Innen um $+1$, im entgegengesetzten Falle um -1, und ist also überall bestimmt. Längs des Ufers dieser Linie setzt sich nun jeder angrenzende Flächentheil auf ganz bestimmte Art fort, so lange die Linie die Begrenzung nicht trifft, da eine Unbestimmtheit jedenfalls nur in einem einzelnen Punkte und also entweder in einem Punkte der Linie selbst oder in einer endlichen Entfernung von derselben Statt hat; wir können daher, wenn wir unsere Betrachtung auf einen im Innern der Fläche verlaufenden Theil der Linie l und zu beiden Seiten auf einen hinreichend kleinen Flächenstreifen beschränken, von bestimmten angrenzenden Flächentheilen reden, deren Anzahl auf jeder Seite gleich ist, und die wir, indem wir der Linie eine bestimmte Richtung beilegen, auf der Linken mit $a_1, a_2, \ldots a_n$, auf der Rechten mit $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$, bezeichnen. Jeder Flächentheil a wird sich dann in einen der Flächentheile a' fortsetzen; dieser wird zwar im Allgemeinen für den ganzen Lauf der Linie l derselbe sein, kann sich jedoch für besondere Lagen von l in einem ihrer Punkte ändern. Nehmen wir an, dass oberhalb eines solchen Punktes σ (d. h.

Cauchy–Riemann equations now taken as fundamental to the theory

Other key concepts appear explicitly:

- harmonic functions;
- conformality (a complex function preserves angles wherever its derivative does not vanish);
- ...

Riemann on complex analysis

— 4 —

so erhellt, dass er und zwar nur dann für je zwei Werthe von dx und dy denselben Werth haben wird, wenn

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$$

ist. Diese Bedingungen sind also hinreichend und nothwendig, damit $w = u + vi$ eine Function von $z = x + yi$ sei. Für die einzelnen Glieder dieser Function fliessen aus ihnen die folgenden:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

welche für die Untersuchung der Eigenschaften, die Einem Gliede einer solchen Function einzeln betrachtet zukommen, die Grundlage bilden. Wir werden den Beweis für die wichtigsten dieser Eigenschaften einer eingehenderen Betrachtung der vollständigen Function voraufgehen lassen, zuvor aber noch einige Punkte, welche allgemeineren Gebieten angehören, erörtern und festlegen, um uns den Boden für jene Untersuchungen zu ebenen.

* * *

5.

Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Grössen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von aufeinander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke; setzen jedoch für einen solchen Fall voraus, dass die auf einander liegenden Flächentheile nicht längs einer Linie zusammenhängen, so dass eine Umfaltung der Fläche, oder eine Spaltung in auf einander liegende Theile nicht vorkommt.

Die Anzahl der in jedem Theile der Ebene auf einander liegenden Flächentheile ist alsdann vollkommen bestimmt, wenn die Begrenzung der Lage und dem Sinne nach (d. h. ihre innere und äussere Seite) gegeben ist; ihr Verlauf kann sich jedoch noch verschieden gestalten.

In der That, ziehen wir durch den von der Fläche bedeckten Theil der Ebene eine beliebige Linie l, so ändert sich die Anzahl der über einander liegenden Flächentheile nur beim Ueberschreiten der Begrenzung, und zwar beim Uebertritt von Aussen nach Innen um $+1$, im entgegengesetzten Falle um -1, und ist also überall bestimmt. Längs des Ufers dieser Linie setzt sich nun jeder angrenzende Flächentheil auf ganz bestimmte Art fort, so lange die Linie die Begrenzung nicht trifft, da eine Unbestimmtheit jedenfalls nur in einem einzelnen Punkte und also entweder in einem Punkte der Linie selbst oder in einer endlichen Entfernung von derselben Statt hat; wir können daher, wenn wir unsere Betrachtung auf einen im Innern der Fläche verlaufenden Theil der Linie l und zu beiden Seiten auf einen hinreichend kleinen Flächenstreifen beschränken, von bestimmten angrenzenden Flächentheilen reden, deren Anzahl auf jeder Seite gleich ist, und die wir, indem wir der Linie eine bestimmte Richtung beilegen, auf der Linken mit $a_1, a_2, \dots a_n$, auf der Rechten mit $a'_1, a'_2, \dots a'_n$, bezeichnen. Jeder Flächentheil a wird sich dann in einen der Flächentheile a' fortsetzen; dieser wird zwar im Allgemeinen für den ganzen Lauf der Linie l derselbe sein, kann sich jedoch für besondere Lagen von l in einem ihrer Punkte ändern. Nehmen wir an, dass oberhalb eines solchen Punktes σ (d. h.

Cauchy–Riemann equations now taken as fundamental to the theory

Other key concepts appear explicitly:

- harmonic functions;
- conformality (a complex function preserves angles wherever its derivative does not vanish);
- ...

Early impact limited by abstraction and restricted publication

The word 'analytic'

The words analysis, analytic have had many meanings:

The word 'analytic'

The words analysis, analytic have had many meanings:

Classical: a method of investigating a problem, the opposite of synthesis

The word ‘analytic’

The words analysis, analytic have had many meanings:

Classical:	a method of investigating a problem, the opposite of synthesis
c. 1600:	algebra became known as the ‘analytic art’ or just ‘analysis’, using finite equations

The word 'analytic'

The words analysis, analytic have had many meanings:

Classical:	a method of investigating a problem, the opposite of synthesis
c. 1600:	algebra became known as the 'analytic art' or just 'analysis', using finite equations
1669:	Newton introduced 'analysis with infinite equations', that is, infinite series

The word ‘analytic’

The words analysis, analytic have had many meanings:

Classical:	a method of investigating a problem, the opposite of synthesis
c. 1600:	algebra became known as the ‘analytic art’ or just ‘analysis’, using finite equations
1669:	Newton introduced ‘analysis with infinite equations’, that is, infinite series
1748:	Euler wrote on the analysis of infinitely large and infinitely small quantities

The word 'analytic'

The words analysis, analytic have had many meanings:

Classical:	a method of investigating a problem, the opposite of synthesis
c. 1600:	algebra became known as the 'analytic art' or just 'analysis', using finite equations
1669:	Newton introduced 'analysis with infinite equations', that is, infinite series
1748:	Euler wrote on the analysis of infinitely large and infinitely small quantities
1790–1840:	in sections of journals, the Académie des Sciences, etc., Analyse could mean 'pure mathematics' though with a bias to algebra, calculus, etc.; compare Géométrie also meaning 'pure mathematics', but with (perhaps) spatial bias

The word 'analytic'

The words analysis, analytic have had many meanings:

Classical:	a method of investigating a problem, the opposite of synthesis
c. 1600:	algebra became known as the 'analytic art' or just 'analysis', using finite equations
1669:	Newton introduced 'analysis with infinite equations', that is, infinite series
1748:	Euler wrote on the analysis of infinitely large and infinitely small quantities
1790–1840:	in sections of journals, the Académie des Sciences, etc., Analyse could mean 'pure mathematics' though with a bias to algebra, calculus, etc.; compare Géométrie also meaning 'pure mathematics', but with (perhaps) spatial bias
1821:	Cauchy's cours d'analyse shows similarities with our analysis courses today

What *is* an analytic function?

Lagrange, 1797: function is analytic if it has a power-series expansion

What *is* an analytic function?

Lagrange, 1797: function is analytic if it has a power-series expansion

Cauchy's point of departure, 1814–1831: treated complex functions that are continuous and satisfy the Cauchy–Riemann equations (always true for analytic functions in the sense of Lagrange), but used no special terminology

What *is* an analytic function?

Lagrange, 1797: function is analytic if it has a power-series expansion

Cauchy's point of departure, 1814–1831: treated complex functions that are continuous and satisfy the Cauchy–Riemann equations (always true for analytic functions in the sense of Lagrange), but used no special terminology

Riemann, 1851: switched focus to complex functions for which $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ exists in the region of interest

What *is* an analytic function?

Lagrange, 1797: function is analytic if it has a power-series expansion

Cauchy's point of departure, 1814–1831: treated complex functions that are continuous and satisfy the Cauchy–Riemann equations (always true for analytic functions in the sense of Lagrange), but used no special terminology

Riemann, 1851: switched focus to complex functions for which $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ exists in the region of interest

Weierstrass, 1860s: applied Lagrange's term analytic to Riemann's conception of function

What *is* an analytic function?

Lagrange, 1797: function is analytic if it has a power-series expansion

Cauchy's point of departure, 1814–1831: treated complex functions that are continuous and satisfy the Cauchy–Riemann equations (always true for analytic functions in the sense of Lagrange), but used no special terminology

Riemann, 1851: switched focus to complex functions for which $\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ exists in the region of interest

Weierstrass, 1860s: applied Lagrange's term analytic to Riemann's conception of function

Oxford, 2020: we follow Riemann and Weierstrass, by using the words holomorphic, meromorphic, etc. as variants of analytic, with slightly different meanings