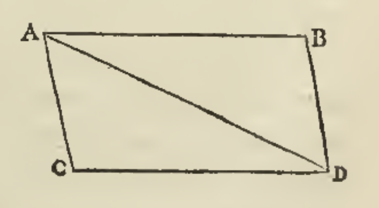
B01 History of Mathematics
Lecture XIV
Linear algebra
Part 3: Vectors and vector spaces

MT 2020 Week 7

Vectors

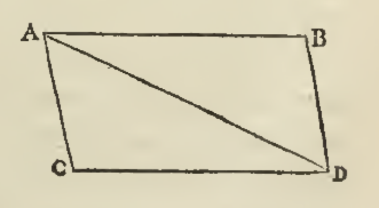
Vectors

Newton (1687): parallelogram of forces

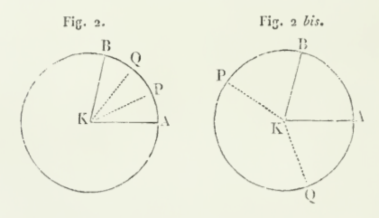


Vectors

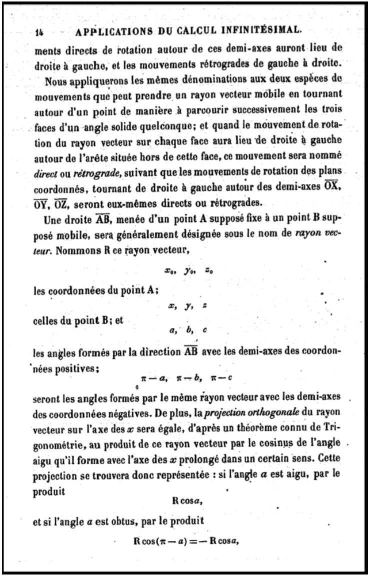
Newton (1687): parallelogram of forces



Argand (1806): complex numbers as directed quantities in the plane



Vectors



ments directs de rotation autour de ces demi-axes auront lieu de droite à gauche, et les mouvements rétrogrades de gauche à droite.

Nous appliquerons les mêmes dénominations aux deux espèces de mouvements que peut prendre un rayon vecteur mobile en tournant autour d'un point de manière à parcourir successivement les trois faces d'un angle solide quelconque; et quand le mouvement de rotation du rayon vecteur sur chaque face aura lieu de droite à gauche autour de l'arête située hors de cette face, ce mouvement sera nommé *direct* ou *rétrograde*, suivant que les mouvements de rotation des plans coordonnés, tournant de droite à gauche autour des demi-axes $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$, seront eux-mêmes directs ou rétrogrades.

Une droite $\overline{AB}$, menée d'un point A supposé fixe à un point B supposé mobile, sera généralement désignée sous le nom de *rayon vecteur*. Nommons R ce rayon vecteur,

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0$$

les coordonnées du point A;

$$x,\quad y,\quad z$$

celles du point B; et

$$a,\quad b,\quad c$$

les angles formés par la direction $\overline{AB}$ avec les demi-axes des coordonnées positives;

$$\pi - a,\quad \pi - b,\quad \pi - c$$

seront les angles formés par le même rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées négatives. De plus, la *projection orthogonale* du rayon vecteur sur l'axe des x sera égale, d'après un théorème connu de Trigonométrie, au produit de ce rayon vecteur par le cosinus de l'angle aigu qu'il forme avec l'axe des x prolongé dans un certain sens. Cette projection se trouvera donc représentée : si l'angle a est aigu, par le produit

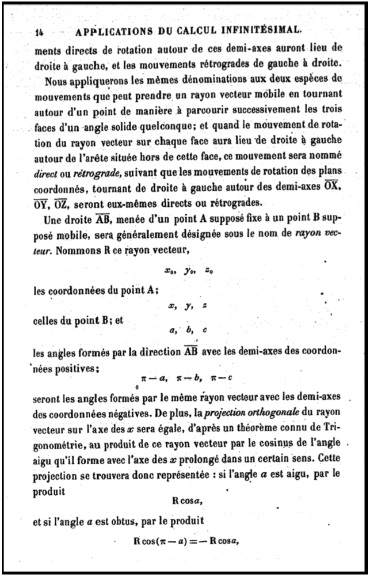
$$R \cos a,$$

et si l'angle a est obtus, par le produit

$$R \cos(\pi - a) = -R \cos a,$$

Word applied mostly to radius vectors

Vectors


14 APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

ments directs de rotation autour de ces demi-axes auront lieu de droite à gauche, et les mouvements rétrogrades de gauche à droite.

Nous appliquerons les mêmes dénominations aux deux espèces de mouvements que peut prendre un rayon vecteur mobile en tournant autour d'un point de manière à parcourir successivement les trois faces d'un angle solide quelconque; et quand le mouvement de rotation du rayon vecteur sur chaque face aura lieu de droite à gauche autour de l'arête située hors de cette face, ce mouvement sera nommé *direct* ou *rétrograde*, suivant que les mouvements de rotation des plans coordonnés, tournant de droite à gauche autour des demi-axes $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$, seront eux-mêmes directs ou rétrogrades.

Une droite $\overline{AB}$, menée d'un point A supposé fixe à un point B supposé mobile, sera généralement désignée sous le nom de *rayon vecteur*. Nommons R ce rayon vecteur,

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0$$

les coordonnées du point A;

$$x, \quad y, \quad z$$

celles du point B; et

$$a, \quad b, \quad c$$

les angles formés par la direction $\overline{AB}$ avec les demi-axes des coordonnées positives;

$$\pi - a, \quad \pi - b, \quad \pi - c$$

seront les angles formés par le même rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées négatives. De plus, la *projection orthogonale* du rayon vecteur sur l'axe des x sera égale, d'après un théorème connu de Trigonométrie, au produit de ce rayon vecteur par le cosinus de l'angle aigu qu'il forme avec l'axe des x prolongé dans un certain sens. Cette projection se trouvera donc représentée : si l'angle a est aigu, par le produit

$$R \cos a,$$

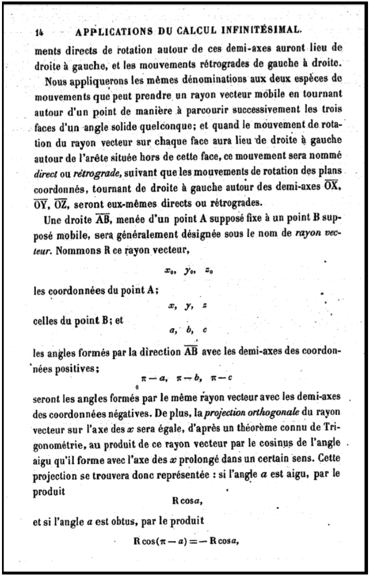
et si l'angle a est obtus, par le produit

$$R \cos(\pi - a) = -R \cos a,$$

Word applied mostly to radius vectors

e.g., as rayon vecteur in Laplace's *Mécanique Céleste* (1799–1825)

Vectors



ments directs de rotation autour de ces demi-axes auront lieu de droite à gauche, et les mouvements rétrogrades de gauche à droite.

Nous appliquerons les mêmes dénominations aux deux espèces de mouvements que peut prendre un rayon vecteur mobile en tournant autour d'un point de manière à parcourir successivement les trois faces d'un angle solide quelconque; et quand le mouvement de rotation du rayon vecteur sur chaque face aura lieu de droite à gauche autour de l'arête située hors de cette face, ce mouvement sera nommé *direct* ou *rétrograde*, suivant que les mouvements de rotation des plans coordonnés, tournant de droite à gauche autour des demi-axes $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$, seront eux-mêmes directs ou rétrogrades.

Une droite $\overline{AB}$, menée d'un point A supposé fixe à un point B supposé mobile, sera généralement désignée sous le nom de *rayon vecteur*. Nommons R ce rayon vecteur,

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0$$

les coordonnées du point A;

$$x,\quad y,\quad z$$

celles du point B; et

$$a,\quad b,\quad c$$

les angles formés par la direction $\overline{AB}$ avec les demi-axes des coordonnées positives;

$$\pi - a,\quad \pi - b,\quad \pi - c$$

seront les angles formés par le même rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées négatives. De plus, la *projection orthogonale* du rayon vecteur sur l'axe des x sera égale, d'après un théorème connu de Trigonométrie, au produit de ce rayon vecteur par le cosinus de l'angle aigu qu'il forme avec l'axe des x prolongé dans un certain sens. Cette projection se trouvera donc représentée : si l'angle a est aigu, par le produit

$$\mathrm{R}\cos a,$$

et si l'angle a est obtus, par le produit

$$\mathrm{R}\cos(\pi - a) = -\mathrm{R}\cos a,$$

Word applied mostly to radius vectors

e.g., as rayon vecteur in Laplace's *Mécanique Céleste* (1799–1825)

Also in Cauchy's *Leçons sur les Applications du Calcul Infinitésimal à la Géométrie* (1826), p. 14:

A line $\overline{\mathrm{AB}}$*, taken from a point* A*, supposed to be fixed, to a moving point* B*, will in general be referred to as a radius vector.*

Hamilton and vectors

Sir William Rowan Hamilton drew a distinction between a 'vector' and a 'radius vector':

Hamilton and vectors

Sir William Rowan Hamilton drew a distinction between a ‘vector’ and a ‘radius vector’:

Between 1843–1866, developed quaternions — 4-dimensional quantities $a + bi + cj + dk$, where $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, designed for use in mechanics (and geometry of 3 dimensions)

Hamilton and vectors

Sir William Rowan Hamilton drew a distinction between a 'vector' and a 'radius vector':

Between 1843–1866, developed quaternions — 4-dimensional quantities $a + bi + cj + dk$, where $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, designed for use in mechanics (and geometry of 3 dimensions)

"*A* VECTOR *is thus . . . a sort of* NATURAL TRIPLET *(suggested by Geometry): and accordingly we shall find that* QUATERNIONS *offer an easy mode of symbolically representing every vector by a* TRINOMIAL FORM *($ix + jy + kz$); which form brings the conception and expression of such a vector into the closest possible connexions with Cartesian and rectangular co-ordinates.*"

Hamilton and vectors

Sir William Rowan Hamilton drew a distinction between a ‘vector’ and a ‘radius vector’:

Between 1843–1866, developed quaternions — 4-dimensional quantities $a + bi + cj + dk$, where $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, designed for use in mechanics (and geometry of 3 dimensions)

“*A* VECTOR *is thus . . . a sort of* NATURAL TRIPLET *(suggested by Geometry): and accordingly we shall find that* QUATERNIONS *offer an easy mode of symbolically representing every vector by a* TRINOMIAL FORM *(*$ix + jy + kz$*); which form brings the conception and expression of such a vector into the closest possible connexions with Cartesian and rectangular co-ordinates.*”

So a quaternion is a scalar + a vector

Vector spaces appear

Die Alexander Ziwet

Ausdehnungslehre.

Vollständig und in strenger Form

bearbeitet

von

Hermann Grassmann,

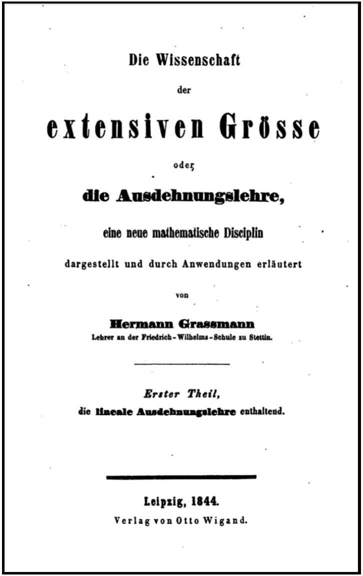
Professor am Gymnasium zu Stettin.

BERLIN, 1862.

VERLAG VON TH. CHR. FR. ENSLIN.

(ADOLPH ENSLIN.)

Grassmann's 'doctrine of extension'



Die Wissenschaft

der

extensiven Grösse

oder

die Ausdehnungslehre,

eine neue mathematische Disciplin

dargestellt und durch Anwendungen erläutert

von

Hermann Grassmann

Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Erster Theil,

die **lineale Ausdehnungslehre** enthaltend.

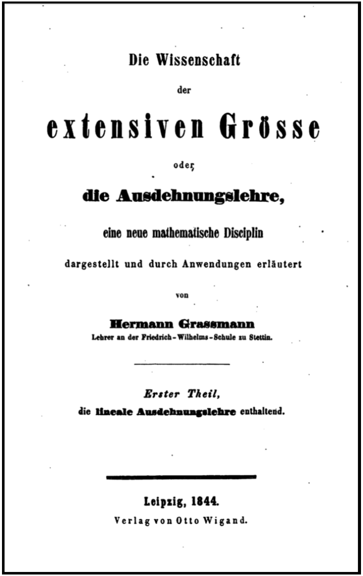
Leipzig, 1844.

Verlag von Otto Wigand.

Die Ausdehnungslehre [*Doctrine of extension*] (1862) is a heavily reworked version of an earlier (1844) work:

The Science of Extensive Quantities, or the Doctrine of Extension, a New Mathematical Discipline, Presented and Explained through Examples

Grassmann's ‘doctrine of extension’


Die Wissenschaft
der
extensiven Grösse
oder
die Ausdehnungslehre,
eine neue mathematische Disciplin
dargestellt und durch Anwendungen erläutert
von
Hermann Grassmann
Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Erster Theil,
die lineale Ausdehnungslehre enthaltend.

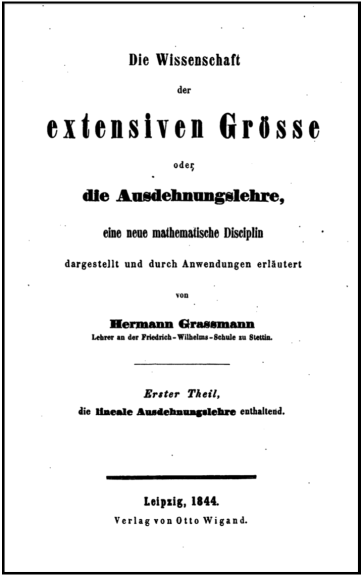
Leipzig, 1844.
Verlag von Otto Wigand.

Die Ausdehnungslehre [*Doctrine of extension*] (1862) is a heavily reworked version of an earlier (1844) work:

The Science of Extensive Quantities, or the Doctrine of Extension, a New Mathematical Discipline, Presented and Explained through Examples

Introduced idea of objects generated by motion — a single element generates an object of order 1, an object of order 1 generates an object of order 2, etc.

Grassmann's 'doctrine of extension'


Die Wissenschaft
der
extensiven Grösse
oder
die Ausdehnungslehre,
eine neue mathematische Disciplin
dargestellt und durch Anwendungen erläutert
von
Hermann Grassmann
Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Erster Theil,
die lineale Ausdehnungslehre enthaltend.

Leipzig, 1844.
Verlag von Otto Wigand.

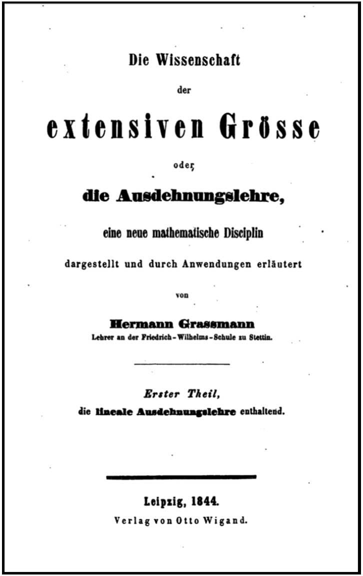
Die Ausdehnungslehre [*Doctrine of extension*] (1862) is a heavily reworked version of an earlier (1844) work:

The Science of Extensive Quantities, or the Doctrine of Extension, a New Mathematical Discipline, Presented and Explained through Examples

Introduced idea of objects generated by motion — a single element generates an object of order 1, an object of order 1 generates an object of order 2, etc.

Objects of the same order can be added together or scaled by real numbers

Grassmann's 'doctrine of extension'


Die Wissenschaft

der

extensiven Grösse

oder

die Ausdehnungslehre,

eine neue mathematische Disciplin

dargestellt und durch Anwendungen erläutert

von

Hermann Grassmann

Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Erster Theil,

die lineale Ausdehnungslehre enthaltend.

Leipzig, 1844.

Verlag von Otto Wigand.

Die Ausdehnungslehre [*Doctrine of extension*] (1862) is a heavily reworked version of an earlier (1844) work:

The Science of Extensive Quantities, or the Doctrine of Extension, a New Mathematical Discipline, Presented and Explained through Examples

Introduced idea of objects generated by motion — a single element generates an object of order 1, an object of order 1 generates an object of order 2, etc.

Objects of the same order can be added together or scaled by real numbers

Little impact at the time

Grassmann's 'extensive quantities'

$$
\begin{aligned}
3)\ a + b - b &= \textstyle\sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} - \sum \overline{\beta e} & \\
&= \textstyle\sum \overline{(\alpha + \beta) e} - \sum \overline{\beta e} & [6]. \\
&= \textstyle\sum \overline{(\alpha + \beta - \beta) e} & [7]. \\
&= \textstyle\sum \overline{\alpha e} = a & \\
4)\ a - b + b &= \textstyle\sum \overline{\alpha e} - \sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\beta e} & \\
&= \textstyle\sum \overline{(\alpha - \beta) e} + \sum \overline{\beta e} & [7]. \\
&= \textstyle\sum \overline{(\alpha - \beta + \beta) e} & [6]. \\
&= \textstyle\sum \overline{\alpha e} = a &
\end{aligned}
$$

9. Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.

B e w e i s. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den 4 Fundamentalformeln in No. 8 abgeleitet werden.

10. E r k l ä r u n g. Eine extensive Grösse mit einer Zahl m u l t i p l i c i r e n heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$\textstyle\sum \overline{\alpha e} \cdot \beta = \beta \cdot \sum \overline{\alpha e} = \sum \overline{(\alpha\beta) \cdot e}$$

11. E r k l ä r u n g. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich null ist, d i v i d i r e n, heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, d. h.

$$\textstyle\sum \overline{\alpha e} : \beta = \sum \overline{\frac{\alpha}{\beta} e}$$

12. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen (a, b) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:

1) $a\beta = \beta a$,
2) $a\beta\gamma = a(\beta\gamma)$,
3) $(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma$,
4) $a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$,
5) $a \cdot 1 = a$,
6) $a\beta = 0$ dann und nur dann, wenn entweder $a = 0$, oder $\beta = 0$,
7) $a : \beta = a\,\frac{1}{\beta}$, wenn $\beta \gtrless 0$ ist *).

B e w e i s. Es sei $a = \sum \overline{\alpha e}$, $b = \sum \overline{\beta e}$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $e_1 \ldots e_n$ bezieht, so ist

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $>$ und $<$ soll ungleich bedeuten.

The 1862 text contains a theory of extensive quantities

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots ,$$

where the e_i are 'units' and the a_i are real numbers,

Grassmann's 'extensive quantities'

4 (9

$$
\begin{aligned}
3)\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{b} &= \sum\overline{\alpha\mathfrak{e}} + \sum\overline{\beta\mathfrak{e}} - \sum\overline{\beta\mathfrak{e}} & \\
&= \sum\overline{(\alpha+\beta)\mathfrak{e}} - \sum\overline{\beta\mathfrak{e}} & [6]. \\
&= \sum\overline{(\alpha+\beta-\beta)\mathfrak{e}} & [7]. \\
&= \sum\overline{\alpha\mathfrak{e}} = \mathfrak{a} & \\
4)\quad \mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{b} &= \sum\overline{\alpha\mathfrak{e}} - \sum\overline{\beta\mathfrak{e}} + \sum\overline{\beta\mathfrak{e}} & \\
&= \sum\overline{(\alpha-\beta)\mathfrak{e}} + \sum\overline{\beta\mathfrak{e}} & [7]. \\
&= \sum\overline{(\alpha-\beta+\beta)\mathfrak{e}} & [6]. \\
&= \sum\overline{\alpha\mathfrak{e}} = \mathfrak{a} &
\end{aligned}
$$

9. Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.

B e w e i s. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den 4 Fundamentalformeln in No. 8 abgeleitet werden.

10. E r k l ä r u n g. Eine extensive Grösse mit einer Zahl m u l t i p l i c i r e n heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha\mathfrak{e}}\cdot\beta = \beta\cdot\sum\overline{\alpha\mathfrak{e}} = \sum\overline{(\alpha\beta)\cdot\mathfrak{e}}$$

11. E r k l ä r u n g. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich null ist, d i v i d i r e n, heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha\mathfrak{e}} : \beta = \sum\overline{\frac{\alpha}{\beta}\mathfrak{e}}$$

12. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:

1) $\mathfrak{a}\beta = \beta\mathfrak{a}$,
2) $\mathfrak{a}\beta\gamma = \mathfrak{a}(\beta\gamma)$,
3) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\gamma = \mathfrak{a}\gamma + \mathfrak{b}\gamma$,
4) $\mathfrak{a}(\beta+\gamma) = \mathfrak{a}\beta + \mathfrak{a}\gamma$,
5) $\mathfrak{a}\cdot 1 = \mathfrak{a}$,
6) $\mathfrak{a}\beta = 0$ dann und nur dann, wenn entweder $\mathfrak{a} = 0$, oder $\beta = 0$,
7) $\mathfrak{a} : \beta = \mathfrak{a}\frac{1}{\beta}$, wenn $\beta \gtrless 0$ ist *).

B e w e i s. Es sei $\mathfrak{a} = \sum\overline{\alpha\mathfrak{e}}$, $\mathfrak{b} = \sum\overline{\beta\mathfrak{e}}$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_n$ bezieht, so ist

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $>$ und $<$ soll ungleich bedeuten.

The 1862 text contains a theory of extensive quantities

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots ,$$

where the e_i are 'units' and the a_i are real numbers, including

- rules for the arithmetic of such quantities

Grassmann's 'extensive quantities'

$$
\begin{aligned}
3)\ a + b - b &= \sum \alpha e + \sum \beta e - \sum \beta e \\
&= \sum (\alpha + \beta) e - \sum \beta e && [6]. \\
&= \sum (\alpha + \beta - \beta) e && [7]. \\
&= \sum \alpha e = a \\
4)\ a - b + b &= \sum \alpha e - \sum \beta e + \sum \beta e \\
&= \sum (\alpha - \beta) e + \sum \beta e && [7]. \\
&= \sum (\alpha - \beta + \beta) e && [6]. \\
&= \sum \alpha e = a
\end{aligned}
$$

9. Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.

Beweis. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den 4 Fundamentalformeln in No. 8 abgeleitet werden.

10. Erklärung. Eine extensive Grösse mit einer Zahl multipliciren heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$\sum \alpha e \cdot \beta = \beta \cdot \sum \alpha e = \sum (\alpha\beta) \cdot e$$

11. Erklärung. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich null ist, dividiren, heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, d. h.

$$\sum \alpha e : \beta = \sum \frac{\alpha}{\beta} e$$

12. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen (a, b) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:

1) $a\beta = \beta a$,
2) $a\beta\gamma = a(\beta\gamma)$,
3) $(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma$,
4) $a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$,
5) $a \cdot 1 = a$,
6) $a\beta = 0$ dann und nur dann, wenn entweder $a = 0$, oder $\beta = 0$,
7) $a : \beta = a \frac{1}{\beta}$, wenn $\beta \gtrless 0$ ist *).

Beweis. Es sei $a = \sum \alpha e$, $b = \sum \beta e$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $e_1 \ldots e_n$ bezieht, so ist

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $>$ und $<$ soll ungleich bedeuten.

The 1862 text contains a theory of extensive quantities

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots ,$$

where the e_i are 'units' and the a_i are real numbers, including

- rules for the arithmetic of such quantities
- a notion of linear independence

Grassmann's 'extensive quantities'

4 (9

$$
\begin{aligned}
3)\ a + b - b &= \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} - \sum \overline{\beta e} \\
&= \sum \overline{(\alpha+\beta) e} - \sum \overline{\beta e} && [6]. \\
&= \sum \overline{(\alpha+\beta-\beta) e} && [7]. \\
&= \sum \overline{\alpha e} = a \\
4)\ a - b + b &= \sum \overline{\alpha e} - \sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\beta e} \\
&= \sum \overline{(\alpha-\beta) e} + \sum \overline{\beta e} && [7]. \\
&= \sum \overline{(\alpha-\beta+\beta) e} && [6]. \\
&= \sum \overline{\alpha e} = a
\end{aligned}
$$

9. Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.

Beweis. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den 4 Fundamentalformeln in No. 8 abgeleitet werden.

10. Erklärung. Eine extensive Grösse mit einer Zahl multipliciren heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} \cdot \beta = \beta \cdot \sum \overline{\alpha e} = \sum \overline{(\alpha\beta) \cdot e}$$

11. Erklärung. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich null ist, dividiren, heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} : \beta = \sum \overline{\frac{\alpha}{\beta} e}$$

12. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen (a, b) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:

1) $a\beta = \beta a$,
2) $a\beta\gamma = a(\beta\gamma)$,
3) $(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma$,
4) $a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma$,
5) $a \cdot 1 = a$,
6) $a\beta = 0$ dann und nur dann, wenn entweder $a = 0$, oder $\beta = 0$,
7) $a : \beta = a \frac{1}{\beta}$, wenn $\beta \gtrless 0$ ist *).

Beweis. Es sei $a = \sum \overline{\alpha e}$, $b = \sum \overline{\beta e}$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $e_1 \ldots e_n$ bezieht, so ist

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $>$ und $<$ soll ungleich bedeuten.

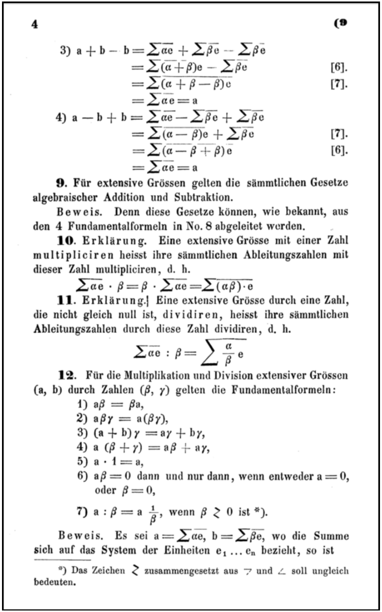
The 1862 text contains a theory of extensive quantities

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots,$$

where the e_i are 'units' and the a_i are real numbers, including

- rules for the arithmetic of such quantities
- a notion of linear independence
- dimension

Grassmann's 'extensive quantities'



4 (9

$$
\begin{aligned}
3)\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{b} &= \sum\overline{\alpha e}+\sum\overline{\beta e}-\sum\overline{\beta e} \\
&= \sum\overline{(\alpha+\beta)e}-\sum\overline{\beta e} && [6]. \\
&= \sum\overline{(\alpha+\beta-\beta)e} && [7]. \\
&= \sum\overline{\alpha e}=\mathfrak{a} \\
4)\ \mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{b} &= \sum\overline{\alpha e}-\sum\overline{\beta e}+\sum\overline{\beta e} \\
&= \sum\overline{(\alpha-\beta)e}+\sum\overline{\beta e} && [7]. \\
&= \sum\overline{(\alpha-\beta+\beta)e} && [6]. \\
&= \sum\overline{\alpha e}=\mathfrak{a}
\end{aligned}
$$

9. Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.

Beweis. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den 4 Fundamentalformeln in No. 8 abgeleitet werden.

10. Erklärung. Eine extensive Grösse mit einer Zahl multipliciren heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha e}\cdot\beta=\beta\cdot\sum\overline{\alpha e}=\sum\overline{(\alpha\beta)\cdot e}$$

11. Erklärung. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich null ist, dividiren, heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha e}:\beta=\sum\overline{\frac{\alpha}{\beta}e}$$

12. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:

1) $\mathfrak{a}\beta = \beta\mathfrak{a}$,
2) $\mathfrak{a}\beta\gamma = \mathfrak{a}(\beta\gamma)$,
3) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\gamma = \mathfrak{a}\gamma+\mathfrak{b}\gamma$,
4) $\mathfrak{a}(\beta+\gamma) = \mathfrak{a}\beta+\mathfrak{a}\gamma$,
5) $\mathfrak{a}\cdot 1 = \mathfrak{a}$,
6) $\mathfrak{a}\beta = 0$ dann und nur dann, wenn entweder $\mathfrak{a}=0$, oder $\beta = 0$,
7) $\mathfrak{a}:\beta = \mathfrak{a}\frac{1}{\beta}$, wenn $\beta \gtrless 0$ ist *).

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}=\sum\overline{\alpha e}$, $\mathfrak{b}=\sum\overline{\beta e}$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $e_1 \dots e_n$ bezieht, so ist

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $>$ und $<$ soll ungleich bedeuten.

The 1862 text contains a theory of extensive quantities

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots ,$$

where the e_i are 'units' and the a_i are real numbers, including

- rules for the arithmetic of such quantities
- a notion of linear independence
- dimension
- ...

Grassmann's 'extensive quantities'

$$
\begin{aligned}
3)\ \mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{b} &= \sum\overline{\alpha\mathrm{e}}+\sum\overline{\beta\mathrm{e}}-\sum\overline{\beta\mathrm{e}} & \\
&= \sum\overline{(\alpha+\beta)\mathrm{e}}-\sum\overline{\beta\mathrm{e}} & [6]. \\
&= \sum\overline{(\alpha+\beta-\beta)\mathrm{e}} & [7]. \\
&= \sum\overline{\alpha\mathrm{e}}=\mathrm{a} & \\
4)\ \mathrm{a}-\mathrm{b}+\mathrm{b} &= \sum\overline{\alpha\mathrm{e}}-\sum\overline{\beta\mathrm{e}}+\sum\overline{\beta\mathrm{e}} & \\
&= \sum\overline{(\alpha-\beta)\mathrm{e}}+\sum\overline{\beta\mathrm{e}} & [7]. \\
&= \sum\overline{(\alpha-\beta+\beta)\mathrm{e}} & [6]. \\
&= \sum\overline{\alpha\mathrm{e}}=\mathrm{a} &
\end{aligned}
$$

9. Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.

Beweis. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den 4 Fundamentalformeln in No. 8 abgeleitet werden.

10. Erklärung. Eine extensive Grösse mit einer Zahl multipliciren heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha\mathrm{e}}\cdot\beta=\beta\cdot\sum\overline{\alpha\mathrm{e}}=\sum\overline{(\alpha\beta)\cdot\mathrm{e}}$$

11. Erklärung. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich null ist, dividiren, heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha\mathrm{e}}:\beta=\sum\overline{\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{e}}$$

12. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen (a, b) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:

1) $\mathrm{a}\beta=\beta\mathrm{a}$,
2) $\mathrm{a}\beta\gamma=\mathrm{a}(\beta\gamma)$,
3) $(\mathrm{a}+\mathrm{b})\gamma=\mathrm{a}\gamma+\mathrm{b}\gamma$,
4) $\mathrm{a}(\beta+\gamma)=\mathrm{a}\beta+\mathrm{a}\gamma$,
5) $\mathrm{a}\cdot 1=\mathrm{a}$,
6) $\mathrm{a}\beta=0$ dann und nur dann, wenn entweder $\mathrm{a}=0$, oder $\beta=0$,
7) $\mathrm{a}:\beta=\mathrm{a}\,\frac{1}{\beta}$, wenn $\beta \gtrless 0$ ist *).

Beweis. Es sei $\mathrm{a}=\sum\overline{\alpha\mathrm{e}}$, $\mathrm{b}=\sum\overline{\beta\mathrm{e}}$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $\mathrm{e}_1 \ldots \mathrm{e}_n$ bezieht, so ist

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $>$ und $<$ soll ungleich bedeuten.

The 1862 text contains a theory of extensive quantities

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots ,$$

where the e_i are 'units' and the a_i are real numbers, including

- rules for the arithmetic of such quantities
- a notion of linear independence
- dimension
- ...

But still had little impact

(See *Mathematics emerging*, §17.4.1.)

Vector spaces defined


CALCOLO

GEOMETRICO

secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann

PRECEDUTO DALLE

OPERAZIONI DELLA LOGICA DEDUTTIVA

PER

GIUSEPPE PEANO

PROFESSORE NELLA R. ACCADEMIA MILITARE
INCARICATO NELLA R. UNIVERSITÀ DI TORINO

LABOR ET HONOR

TORINO
FRATELLI BOCCA EDITORI
LIBRAI DI S. M. IL RE D'ITALIA

SUCCURSALI

ROMA
Via del Corso, 216-217.

FIRENZE
Via Cerretani, 8

DEPOSITI

PALERMO
Università, 12
(N. Carosio)

NAPOLI
Piazza Plebiscito, 2

CATANIA
S. Maria al Ros.o, 23
(N. Carosio)

1888

On the way towards developing a 'geometric calculus', Guiseppe Peano axiomatised Grassmann's collections of extensive quantities as linear systems (sistemi lineari), and moved to a fully abstract setting

Vector spaces defined


CALCOLO

GEOMETRICO

secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann

PRECEDUTO DALLE

OPERAZIONI DELLA LOGICA DEDUTTIVA

PER

GIUSEPPE PEANO

PROFESSORE NELLA R. ACCADEMIA MILITARE
INCARICATO NELLA R. UNIVERSITÀ DI TORINO

TORINO
FRATELLI BOCCA EDITORI
LIBRAI DI S. M. IL RE D'ITALIA

SUCCURSALI

ROMA
Via del Corso, 216-217.

FIRENZE
Via Cerretani, 8

DEPOSITI

PALERMO
Università, 12
(N. Carosio)

NAPOLI
Piazza Plebiscito, 2

CATANIA
S. Maria al Ros.°, 23
(N. Carosio)

1888

On the way towards developing a 'geometric calculus', Guiseppe Peano axiomatised Grassmann's collections of extensive quantities as linear systems (sistemi lineari), and moved to a fully abstract setting

Clarified connection between dimension and linear independence

Vector spaces defined

On the way towards developing a 'geometric calculus', Guiseppe Peano axiomatised Grassmann's collections of extensive quantities as linear systems (sistemi lineari), and moved to a fully abstract setting

Clarified connection between dimension and linear independence — noted existence of linear systems with infinite dimension

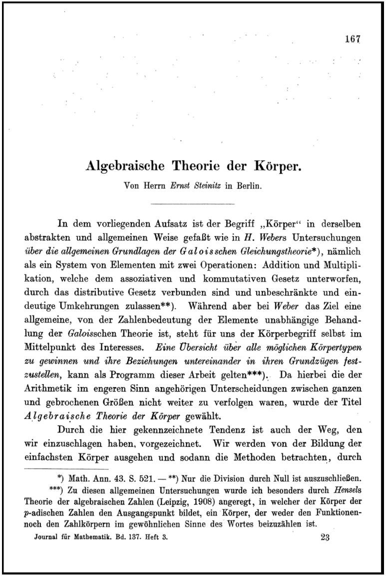
Vector spaces defined

On the way towards developing a 'geometric calculus', Guiseppe Peano axiomatised Grassmann's collections of extensive quantities as linear systems (sistemi lineari), and moved to a fully abstract setting

Clarified connection between dimension and linear independence — noted existence of linear systems with infinite dimension

Also no immediate impact!

Vector spaces develop



167

Algebraische Theorie der Körper.

Von Herrn *Ernst Steinitz* in Berlin.

In dem vorliegenden Aufsatz ist der Begriff „Körper" in derselben abstrakten und allgemeinen Weise gefaßt wie in *H. Webers* Untersuchungen *über die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie**), nämlich als ein System von Elementen mit zwei Operationen: Addition und Multiplikation, welche dem assoziativen und kommutativen Gesetz unterworfen, durch das distributive Gesetz verbunden sind und unbeschränkte und eindeutige Umkehrungen zulassen**). Während aber bei *Weber* das Ziel eine allgemeine, von der Zahlenbedeutung der Elemente unabhängige Behandlung der *Galois*schen Theorie ist, steht für uns der Körperbegriff selbst im Mittelpunkt des Interesses. *Eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen*, kann als Programm dieser Arbeit gelten***). Da hierbei die der Arithmetik im engeren Sinn angehörigen Unterscheidungen zwischen ganzen und gebrochenen Größen nicht weiter zu verfolgen waren, wurde der Titel *Algebraische Theorie der Körper* gewählt.

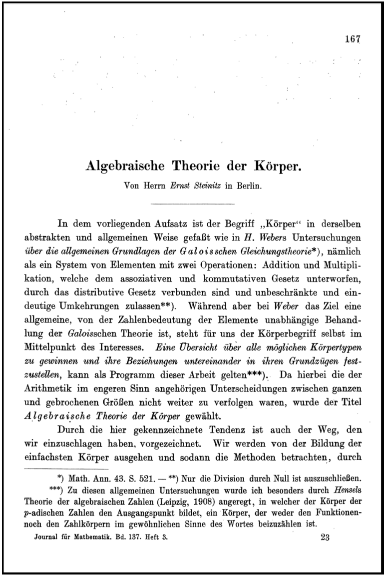
Durch die hier gekennzeichnete Tendenz ist auch der Weg, den wir einzuschlagen haben, vorgezeichnet. Wir werden von der Bildung der einfachsten Körper ausgehen und sodann die Methoden betrachten, durch

*) Math. Ann. 43. S. 521. — **) Nur die Division durch Null ist auszuschließen.
***) Zu diesen allgemeinen Untersuchungen wurde ich besonders durch *Hensels* Theorie der algebraischen Zahlen (Leipzig, 1908) angeregt, in welcher der Körper der *p*-adischen Zahlen den Ausgangspunkt bildet, ein Körper, der weder den Funktionen- noch den Zahlkörpern im gewöhnlichen Sinne des Wortes beizuzählen ist.

Journal für Mathematik. Bd. 137. Heft 3. 23

Dedekind (1879): fields and 'modules' needed for algebraic number theory in famous appendices to his third edition of Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie* [*Lectures on number theory*]; published also separately in France, 1876–77

Vector spaces develop


167

Algebraische Theorie der Körper.

Von Herrn *Ernst Steinitz* in Berlin.

In dem vorliegenden Aufsatz ist der Begriff „Körper“ in derselben abstrakten und allgemeinen Weise gefaßt wie in *H. Webers* Untersuchungen *über die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie**), nämlich als ein System von Elementen mit zwei Operationen: Addition und Multiplikation, welche dem assoziativen und kommutativen Gesetz unterworfen, durch das distributive Gesetz verbunden sind und unbeschränkte und eindeutige Umkehrungen zulassen**). Während aber bei *Weber* das Ziel eine allgemeine, von der Zahlenbedeutung der Elemente unabhängige Behandlung der *Galois*schen Theorie ist, steht für uns der Körperbegriff selbst im Mittelpunkt des Interesses. *Eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen*, kann als Programm dieser Arbeit gelten***). Da hierbei die der Arithmetik im engeren Sinn angehörigen Unterscheidungen zwischen ganzen und gebrochenen Größen nicht weiter zu verfolgen waren, wurde der Titel *Algebraische Theorie der Körper* gewählt.

Durch die hier gekennzeichnete Tendenz ist auch der Weg, den wir einzuschlagen haben, vorgezeichnet. Wir werden von der Bildung der einfachsten Körper ausgehen und sodann die Methoden betrachten, durch

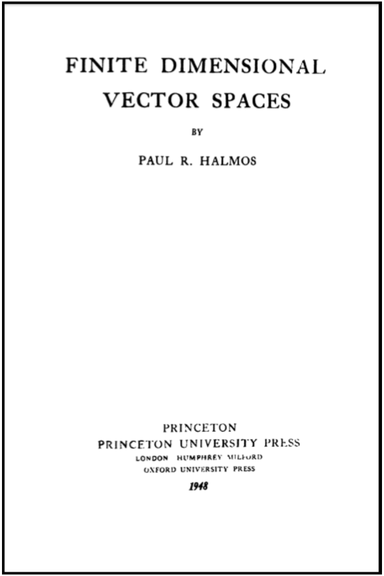
*) Math. Ann. 43. S. 521. — **) Nur die Division durch Null ist auszuschließen.
***) Zu diesen allgemeinen Untersuchungen wurde ich besonders durch *Hensels* Theorie der algebraischen Zahlen (Leipzig, 1908) angeregt, in welcher der Körper der p-adischen Zahlen den Ausgangspunkt bildet, ein Körper, der weder den Funktionen- noch den Zahlkörpern im gewöhnlichen Sinne des Wortes beizuzählen ist.

Journal für Mathematik. Bd. 137. Heft 3. 23

Dedekind (1879): fields and 'modules' needed for algebraic number theory in famous appendices to his third edition of Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie* [*Lectures on number theory*]; published also separately in France, 1876–77

Ernst Steinitz (1910), 'Algebraische Theorie der Körper' ['Algebraic theory of fields'] — contains a beautifully crystallised theory of linear dependence and independence, bases, dimension, etc., in the form it is now taught

Vector spaces develop



FINITE DIMENSIONAL
VECTOR SPACES

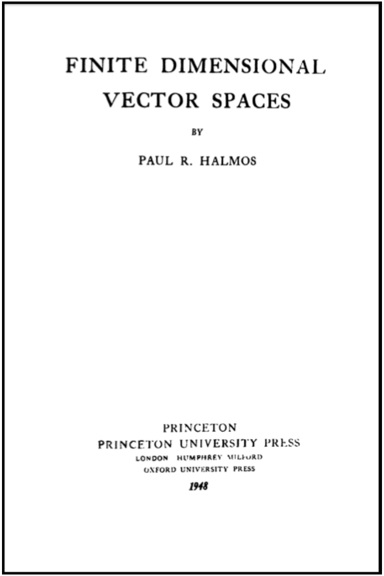
BY

PAUL R. HALMOS

PRINCETON
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
LONDON HUMPHREY MILFORD
OXFORD UNIVERSITY PRESS
1948

B. L. van der Waerden (1930–31), *Moderne Algebra*, incorporating material from lectures by Emil Artin and Emmy Noether (1926–1928)

Vector spaces develop


FINITE DIMENSIONAL
VECTOR SPACES

BY

PAUL R. HALMOS

PRINCETON
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
LONDON HUMPHREY MILFORD
OXFORD UNIVERSITY PRESS
1948

B. L. van der Waerden (1930–31), *Moderne Algebra*, incorporating material from lectures by Emil Artin and Emmy Noether (1926–1928)

Paul Halmos (1942), *Finite-dimensional vector spaces* — made the subject accessible to 1st and 2nd year undergraduates